

DOI: 10.19783/j.cnki.pspc.221335

基于优化泛函的多时滞广域电力系统稳定性分析

郭建锋¹, 钱伟¹, 费树岷², 汪豪¹

(1. 河南理工大学电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000; 2. 东南大学自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对大规模互联电力系统中时滞现象对系统稳定运行造成的不可忽略的影响, 研究多个时滞影响下广域电力系统的稳定性问题。首先, 建立多时滞电力系统模型。其次, 构造一种新的包含多时滞积分项相互耦合的增广型 Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函, 并采用一种新方法, 将构造的泛函作为整体判断其正定性, 放松了对泛函矩阵正定性的限制。然后, 利用基于辅助函数的积分不等式对泛函导数进行估计, 得到了具有较小保守性的多时滞电力系统稳定性判据。最后, 通过对典型二阶时滞系统、单机无穷大系统以及 WSCC 3 机 9 节点系统进行仿真分析, 验证了所提方法的优越性。

关键词: 广域电力系统; 多时滞; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 积分不等式

Stability analysis for wide-area power systems with multiple time delays based on an optimized functional

GUO Jianfeng¹, QIAN Wei¹, FEI Shumin², WANG Hao¹

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China;

2. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: There is an inevitable effect of time delay on the stable operation of large-scale interconnected power systems. A stability analysis of wide-area power systems with multiple time delays is carried out. First, a power system model with multiple time delays is established. Second, a new Lyapunov-Krasovskii (L-K) function is constructed. This contains the coupling integral terms between multiple time delays, and a new method is used to consider the positive definiteness of the functional matrices as a whole, so that the restriction that functional matrices must be positive definite is relaxed. Then, auxiliary-function-based integral inequality is used to estimate the derivatives of the functional. This reduces the conservative of stability conditions. Finally, numerical examples of typical second-order time-delay system, single-machine infinite system and the WSCC 3-generator 9-bus are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

This work is supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 61973105).

Key words: wide-area power systems; multiple time delays; Lyapunov-Krasovskii functional; integral inequality

0 引言

近年来, 基于相量测量单元(phasor measurement unit, PMU)的广域测量系统(wide area measurement system, WAMS)广泛应用, 推动了电力系统分布式测量和协调控制的发展^[1-5]。由于 WAMS 数据是通过开放式通信网络传输的, 数据在传输、处理等过程中不可避免地存在时间延迟现象。WAMS 时滞一

般由 PMU 时滞、通信时滞、控制器处理时滞和执行器执行时滞等组成。其中 PMU 时滞由系统测量、计算以及数据打包和发送时产生的; 通信时滞由串行化时滞、传播时滞、网络处理时滞以及交换时滞等 4 个部分构成, 通信时滞变化范围较大, 其大小与通信带宽、通信介质、传输距离以及数据包大小有关; 控制器处理时滞由计算时滞和等待时滞两部分组成, 其大小与控制器性能及控制算法有关; 执行器执行时滞为执行器接收到控制信号到系统做出响应的的时间, 其大小与执行器性能及系统阻尼有关。由此可见, 广域电力系统时滞是由多种时滞构成的, 这些时滞的存在对系统稳定运行及系统性能将产生

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(61973105); 河南省创新型科技团队项目资助(CXTD2016054); 河南省科技攻关计划项目资助(232102240096)

较大影响^[6-7]。因此,研究时滞影响下广域电力系统的稳定性具有十分重要的现实意义。

时滞影响下电力系统稳定性分析主要分为频域法和时域法两种方法。频域法通过求解系统的特征方程得到特征根,再根据特征根的分布来判断系统的稳定性。因频域法能够得到时滞上界精确值,可以用于系统稳定性的准确判断,同时还可以进行系统动态特征分析,故被应用于研究固定时滞电力系统小扰动稳定性问题。频域法可分为两类,一类是基于临界稳定状态时系统具有一对纯虚根的特性,通过消去特征方程的时滞项^[8]或者利用 Rekasius 变换^[9-10]替换时滞项,进而求解得到精确时滞稳定裕度。如文献[8]通过递归替换消去系统特征方程中的超越项求解特征根,并引入根趋势的定义,得出了三区域负荷频率控制系统时滞上界的解析形式;文献[9]通过 Rekasius 变换处理特征方程中因时滞引入的超越项,采用递归算法求解低维特征方程,得到了广域时滞电力系统精确时滞上界;文献[10]利用 Rekasius 变换精确求解基于模块化多电平换流器的高压直流(MMC-HVDC)系统的时滞稳定裕度,研究了系统高频稳定性问题,并定量分析了系统高频振荡的影响因素。另一类频域法是通过 Pade 近似^[11]或者离散化方法^[12]近似求解系统的最右特征值,以此判断系统稳定性。如文献[11]提出一种适用于多时滞场景的通用 Pade 逼近状态空间,结合参与因子法,利用数值方法挖掘系统动态和时滞动态矩阵信息,求解特征根与特征向量,判断系统稳定性,进而得到了 MMC-HVDC 系统时滞稳定裕度;文献[12]利用切比雪夫离散化方法处理负荷频率控制系统中的时滞变量,并利用函数空间法建立等值离散化系统模型,基于离散化系统的特征值进行稳定性分析,得到了自动发电控制采样保持特性的时滞电力系统稳定性判据。为了获得特征根,频域法要求被分析的系统具有已知或固定的系统参数。因此,频域法适用于研究定常时滞系统^[12]。当系统包含时变、随机或混合等复杂时滞时,频域法计算过程将变得复杂且存在着求解困难等问题。时域法则相对简单,特别在分析时变时滞、随机时滞或混合时滞系统时,具有一定优势,目前已经成为分析时滞电力系统稳定性的主要方法。时域法中应用最为广泛的是 L-K 泛函方法,由于此方法给出的是系统稳定的充分条件,必然存在一定的保守性。为了降低结论的保守性,诸多学者深入研究,一些新的泛函构造和泛函导数估计方法被不断提出。针对时变时滞影响下的电力系统,一些学者在 Lyapunov 稳定性理论框架下采用不同方法进行稳定性分析和控制器设计,得到

保守性各异的稳定性判据和不同的控制器设计方法。如文献[13]构造了含有时滞依赖矩阵的增广型 L-K 泛函,并采用 Jensen 不等式和凸组合技术对时滞分割后的积分项进行处理;文献[14]将 Wirtinger 积分不等式与凸组合技术有效结合来处理泛函导数;文献[15]提出了一种基于改进自由权矩阵与广义特征值的时滞稳定上限求解方法;文献[16]采用扩展型积分不等式和凸组合等方法对泛函导数进行估计,并设计了无记忆反馈和带记忆反馈的控制器;文献[17]在稳定性分析的基础上,设计了时变时滞电力系统带记忆的反馈控制器,运用改进的线性矩阵不等式方法,对判据中的非线性项进行处理;文献[18]采用 L-K 泛函和降阶模型方法设计出了广域阻尼控制器。针对随机时滞影响下的电力系统,文献[19]考虑了通信时滞概率分布特性,建立了随机时滞影响下的负荷频率控制系统数学模型,构造了 Delay-product 增广型 L-K 泛函,采用基于 Wirtinger 积分不等式和一种新的延伸反凸组合不等式,得到了保守性较小的稳定性和 H_∞ 性能判据;文献[20]针对含有概率分布特性时滞的负荷频率控制系统,利用 L-K 泛函方法,得到了概率分布时滞影响下的负荷频率控制系统稳定性判据,并设计了 H_∞ 控制器。需要指出的是,以上研究仅考虑了单个时滞现象对电力系统的影响,但是在实际电力系统中,有多台发电机组同时运行时,安装于发电机组上的相量测量单元同时工作,中心控制系统同时反馈给多个相量采集单元,因而在广域测量系统中可能存在多个时滞同时并存的情况^[21]。针对实际电力系统存在多时滞的情形,有关多时滞影响下电力系统的稳定分析方法被提出。如文献[22]对 L-K 泛函进行简化并采用自由权矩阵方法将单时滞系统稳定性判据推广到多时滞,得到了多时滞电力系统稳定性判据。文献[23]考虑广域电力系统测量信号传输时存在多个时滞的情况,建立了多时滞的电力系统模型,借鉴在构造单时滞系统 L-K 泛函时引入积分二次型的思路构造新的泛函,得到改进的多时滞电力系统稳定性判据。文献[24]基于多时滞电力系统模型,提出一种通过权值计算来甄别 L-K 泛函冗余项的有效方法,通过剔除冗余项来优化 L-K 泛函,降低了多时滞电力系统稳定性判据的保守性。文献[25]采用基于 Wirtinger 积分不等式的放缩技巧且通过引入必要的松散项,得到了保守性较小的多时滞电力系统稳定性判据。总体来看,现有研究时滞电力系统的文献还是以考虑单时滞情况居多,研究多时滞系统稳定性的成果相对较少,并且其稳定性判据的保守性有待改善,特别是在泛函构造方式、泛函导数估

计方法以及两者有效配合上仍存在较大提升空间。

基于以上分析, 本文进一步研究多时滞影响下电力系统稳定性问题。首先建立多时滞电力系统模型, 在此基础上, 构造一种包含多时滞积分项相互耦合的增广型 L-K 泛函, 充分利用时滞信息, 建立不同变量间的耦合关系, 并根据泛函特点, 将构造的部分泛函综合起来, 整体考虑其正定性, 放松了传统方法中对所有泛函矩阵必须正定的限制, 为有效降低结论的保守性奠定了基础。然后, 采用基于辅助函数的一重和二重积分不等式对泛函导数进行精确估计, 得到保守性更小的稳定性判据。最后, 通过仿真实例验证了本文方法的有效性。

1 多时滞电力系统模型

传统的电力系统暂态过程可以由微分代数方程组描述。由于时滞的存在, 可形成以下含有 m 个时滞环节的电力系统微分代数方程组模型, 如式(1)。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量; $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r$ 是代数向量; $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t - \tau_i)$ 是系统的时滞状态向量; $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t - \tau_i)$ 是时滞代数向量; $\tau_i \in \mathbf{R} (i = 1, 2, \dots, m)$ 是时滞常数; $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 表示发电机、励磁系统、原动机和其他动态元件以及负荷等动态过程对应的向量场函数; $\mathbf{g}(\cdot)$ 和 $\mathbf{g}_i(\cdot)$ 分别是当前时刻和 τ_i 之前的系统代数约束。

将式(1)在平衡点 $(\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e)$ 处线性化, 可得

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_0 \Delta \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}_0 \Delta \mathbf{y} + \sum_{i=1}^m (\hat{\mathbf{A}}_{x_i} \Delta \mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{B}}_{y_i} \Delta \mathbf{y}_i) \\ \hat{\mathbf{C}}_0 \Delta \mathbf{x} + \hat{\mathbf{D}}_0 \Delta \mathbf{y} = 0 \\ \hat{\mathbf{C}}_{x_i} \Delta \mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{D}}_{y_i} \Delta \mathbf{y}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\hat{\mathbf{A}}_0 = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{B}}_0 = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$, $\hat{\mathbf{C}}_0 = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{D}}_0 = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}$, $\hat{\mathbf{A}}_{x_i} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}_i$, $\hat{\mathbf{B}}_{y_i} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}_i$, $\hat{\mathbf{C}}_{x_i} = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}_i$, $\hat{\mathbf{D}}_{y_i} = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}_i$, 均是在平衡点处取值。

若 $\hat{\mathbf{D}}_0$ 、 $\hat{\mathbf{D}}_{y_i}$ 可逆, 则式(2)可简化为

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{x}(t - \tau_i) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}_0 = \hat{\mathbf{A}}_0 - \hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\mathbf{D}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_0$; $\mathbf{A}_i = \hat{\mathbf{A}}_{x_i} - \hat{\mathbf{B}}_{y_i} \hat{\mathbf{D}}_{y_i}^{-1} \hat{\mathbf{C}}_{x_i}$ 。

状态变量的增量 $\Delta \mathbf{x}$ 用 $\mathbf{x}(t)$ 表示, 则式(3)可以写成:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t - \tau_i) \quad (4)$$

通过整理归纳, 多时滞系统的状态方程可表示为式(5)。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t - \tau_i) \\ \mathbf{x}(t + \theta) = \boldsymbol{\phi}(t, \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0) \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态向量; $\boldsymbol{\phi}(t, \theta)$ 为系统的初始状态; $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统的系数矩阵; $\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_m)$, 其中 m 为系统中含有的时滞个数。

为了得到本文的主要结论, 需要以下引理。

引理 1^[26] 对于任意给定矩阵 $\mathbf{R} > 0$, 标量 m 、 n 满足 $m < n$ 且向量值函数 $\{\mathbf{x}(s) | s \in [m, n]\}$, 使下面不等式成立:

$$(n - m) \int_m^n \mathbf{x}^T(s) \mathbf{R} \mathbf{x}(s) ds \geq \left(\int_m^n \mathbf{x}^T(s) ds \right) \mathbf{R} \left(\int_m^n \mathbf{x}(s) ds \right)$$

引理 2^[27] 对于任意正定矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 标量 a 、 b 满足 $a < b$ 且向量值函数 $\boldsymbol{\omega} \in [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 使下面不等式成立:

$$\int_a^b \boldsymbol{\omega}^T(s) \mathbf{M} \boldsymbol{\omega}(s) ds \geq \frac{1}{b-a} \boldsymbol{\chi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\chi}_1 + \frac{3}{b-a} \boldsymbol{\chi}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\chi}_2 + \frac{5}{b-a} \boldsymbol{\chi}_3^T \mathbf{M} \boldsymbol{\chi}_3$$

其中,

$$\boldsymbol{\chi}_1 = \boldsymbol{\omega}(b) - \boldsymbol{\omega}(a)$$

$$\boldsymbol{\chi}_2 = \boldsymbol{\omega}(a) + \boldsymbol{\omega}(b) - \frac{2}{b-a} \int_a^b \boldsymbol{\omega}(s) ds$$

$$\boldsymbol{\chi}_3 = \boldsymbol{\chi}_1 + \frac{6}{b-a} \int_a^b \boldsymbol{\omega}(s) ds - \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\theta^b \boldsymbol{\omega}(s) ds d\theta$$

引理 3^[27] 对于任意正定矩阵 $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 标量 a 、 b 满足 $a < b$ 且向量值函数 $\boldsymbol{\omega} \in [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, 使下面不等式成立:

$$\int_a^b \int_\theta^b \boldsymbol{\omega}^T(s) \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}(s) ds d\theta \geq 2 \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_1^T \mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_1 + 4 \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_2^T \mathbf{N} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_2$$

其中,

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_1 = \boldsymbol{\omega}(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \boldsymbol{\omega}(s) ds$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_2 = \boldsymbol{\omega}(b) + \frac{2}{b-a} \int_a^b \boldsymbol{\omega}(s) ds - \frac{6}{(b-a)^2} \int_a^b \int_\theta^b \boldsymbol{\omega}(s) ds d\theta$$

2 多时滞电力系统稳定性判据

针对式(5)所示的多时滞电力系统, 本节通过构造含有多时滞积分项相互耦合的增广型 L-K 泛函,

放松对泛函矩阵的限制并应用具有较小保守性的放缩技巧, 得出具有较小保守性的稳定判据。

定理 1 对于任意时滞常数 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, 如果存在对称矩阵 $P \in \mathbf{R}^{(2m+1)n \times (2m+1)n}$, $Q_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $R_i \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$, $S_i \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$, $R_{j,j+1} \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$ (其中 $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,m-1$; $\bar{i}, \bar{j}=1,\dots,2m+1$) 使得式(6)、式(7)所示线性矩阵不等式成立, 则系统(5)是渐近稳定。

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,\bar{j}} & \dots & A_{1,2m+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & A_{\bar{i},\bar{j}} & \dots & A_{\bar{i},2m+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & * & \dots & A_{2m+1,2m+1} \end{bmatrix} > 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & Y^T \Psi \\ * & -\Psi \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

其中:

$$A_{1,1} = P_{1,1} + \sum_{i=1}^m 6\tau_i^2 R_i$$

$$A_{1,\bar{j}} = P_{1,\bar{j}} + 6\tau_{\bar{j}-1} R_{\bar{j}-1}, (2 \leq \bar{j} \leq m+1)$$

$$A_{\bar{i},\bar{j}} = P_{\bar{i},\bar{j}} - 24R_{\bar{j}-m-1}, (m+2 \leq \bar{j} \leq 2m+1)$$

$$A_{\bar{i},\bar{j}} = P_{\bar{i},\bar{j}} + 18R_{\bar{j}+1} + Q_{\bar{j}+1}, (2 \leq \bar{i} = \bar{j} \leq m+1)$$

$$A_{\bar{i},\bar{j}} = P_{\bar{i},\bar{j}} + (144R_{\bar{j}-m-1})/\tau_{\bar{j}-m-1}^2, (m+2 \leq \bar{i} = \bar{j} \leq 2m+1)$$

$$A_{\bar{i},\bar{j}} = P_{\bar{i},\bar{j}} - (48R_{\bar{j}-m-1})/\tau_{\bar{j}-m-1}, (2 \leq \bar{i} \leq m+1, \bar{j} = m+i)$$

$$A_{\bar{i},\bar{j}} = P_{\bar{i},\bar{j}}, (2 \leq \bar{i} < \bar{j} \leq 2m+1, \bar{j} \neq m+\bar{i})$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{Sym}\{\Pi_1^T P \Pi_2\} + \sum_{i=1}^m (e_i^T \tau_i Q_i e_i - e_{i+1}^T \tau_i Q_i e_{i+1}) - \\ &\sum_{i=1}^m \Pi_3^T \tau_i \bar{R} \Pi_3 - \sum_{j=1}^{m-1} \Pi_4^T \tilde{R} \Pi_4 - 2 \sum_{i=1}^m \Pi_5^T S_i \Pi_5 - \\ &4 \sum_{i=1}^m \Pi_6^T S_i \Pi_6 \end{aligned}$$

$$\text{Sym}\{\Pi_1^T P \Pi_2\} = \Pi_1^T P \Pi_2 + \Pi_2^T P^T \Pi_1$$

$$\bar{R} = \text{diag}\{R_i, 3R_i, 5R_i\}$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R_{j,j+1} & -R_{j,j+1} \\ -R_{j,j+1} & R_{j,j+1} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^m \tau_i^3 R_i + \sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j)^2 R_{j,j+1} + \sum_{i=1}^m \frac{\tau_i^2}{2} S_i$$

$$Y = \begin{bmatrix} A_0, A_1, \dots, A_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{2m} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} e_1^T & \tau_1 e_{m+2}^T & \dots & \tau_m e_{2m+1}^T & \tau_1^2 e_{2m+2}^T & \dots & \tau_m^2 e_{3m+1}^T \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \begin{bmatrix} e_1^T A_0^T + e_2^T A_1^T + \dots + e_{m+1}^T A_m^T & (e_1^T - e_2^T) & \dots \rightarrow \\ \leftarrow & (e_1^T - e_{m+1}^T) & \tau_1 (e_1^T - e_{m+2}^T) & \dots & \tau_m (e_1^T - e_{2m+1}^T) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} \Omega_1^T & \Omega_2^T & \Omega_3^T \end{bmatrix}, \Pi_4 = \begin{bmatrix} e_{j+1}^T & e_{j+2}^T \end{bmatrix}^T$$

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix} e_1^T - e_{i+m+1}^T \end{bmatrix}^T, \Pi_6 = \begin{bmatrix} e_1^T + 2e_{i+m+1}^T - 6e_{i+2m+1}^T \end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} e_1^T - e_{i+1}^T \end{bmatrix}^T, \Omega_2 = \begin{bmatrix} e_1^T + e_{i+1}^T - 2e_{i+m+1}^T \end{bmatrix}^T$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} e_1^T - e_{i+1}^T + 6e_{i+m+1}^T - 12e_{i+2m+1}^T \end{bmatrix}^T$$

$$e_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times (i-1)n} & I_n & \mathbf{0}_{n \times (3m+1-i)n} \end{bmatrix}, i=1,2,\dots,3m+1 (m > 1)$$

$P_{\bar{i},\bar{j}}$ 是对称矩阵 P 的第 \bar{i} 行、第 \bar{j} 列块元素。

* 表示对称矩阵中的对称项。

证明: 对系统(5)构造如式(8)L-K 泛函。

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \quad (8)$$

其中,

$$V_1(t) = \eta^T(t) P \eta(t)$$

$$V_2(t) = \sum_{i=1}^m \tau_i \int_{t-\tau_i}^t x^T(s) Q_i x(s) ds$$

$$V_3(t) = V_{31}(t) + V_{32}(t)$$

$$V_4(t) = \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t \int_{\theta}^t \int_{\lambda}^t \dot{x}^T(s) S_i \dot{x}(s) ds d\lambda d\theta$$

式中:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \begin{bmatrix} x(t) & \int_{t-\tau_1}^t x(s) ds & \dots & \int_{t-\tau_m}^t x(s) ds \rightarrow \\ \leftarrow & \int_{t-\tau_1}^t \int_{\theta}^t x(s) ds d\theta & \dots & \int_{t-\tau_m}^t \int_{\theta}^t x(s) ds d\theta \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$V_{31}(t) = \sum_{i=1}^m \tau_i^2 \int_{t-\tau_i}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds d\theta$$

$$V_{32}(t) = \sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \int_{t-\tau_{j+1}}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) R_{j,j+1} \dot{x}(s) ds d\theta$$

为确保泛函 $V(t)$ 的正定性, 由于 $R_i > 0$, 对 $V_{31}(t)$ 使用引理 3 处理可得

$$V_{31}(t) = \sum_{i=1}^m \tau_i^2 \int_{t-\tau_i}^t \int_{\theta}^t \dot{x}^T(s) R_i \dot{x}(s) ds d\theta \geq \sum_{i=1}^m \tilde{\eta}^T \tilde{A} \tilde{\eta} \quad (9)$$

其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6\tau_i^2 R_i & 6\tau_i R_i & -24R_i \\ * & 18R_i & -\frac{48}{\tau_i} R_i \\ * & * & \frac{144}{\tau_i^2} R_i \end{bmatrix}, \tilde{\eta} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-\tau_i}^t x(s) ds \\ \int_{t-\tau_i}^t \int_{\theta}^t x(s) ds d\theta \end{bmatrix}$$

利用引理 1 对 $V_2(t)$ 进行处理, 可得

$$V_2(t) = \sum_{i=1}^m \tau_i \int_{t-\tau_i}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(s) ds \geq \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t \mathbf{x}^T(s) ds \int_{t-\tau_i}^t \mathbf{x}(s) ds \quad (10)$$

将 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 、 $V_{31}(t)$ 综合起来考虑, 可得

$$V(t) \geq \boldsymbol{\eta}^T(t) \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}(t) + V_{32}(t) + V_4(t) \quad (11)$$

令 $\mathbf{A} > 0$, 则泛函 $V(t)$ 正定, 故得证。

注 1: 泛函构造对降低结论的保守性至关重要, 借鉴现有部分文献在构造泛函时放松了对所有泛函矩阵必须正定的限制, 本文将 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 和 $V_{31}(t)$ 作为一个整体来考虑泛函正定性。在矩阵 $\mathbf{R}_i > 0$ 、 $\mathbf{S}_i > 0$ 、 $\mathbf{R}_{j,j+1} > 0$ 和 $\mathbf{A} > 0$ 时, 泛函 $V(t)$ 是正定的, 从而在保证泛函 $V(t)$ 整体正定性的同时放松了对泛函矩阵 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q}_i 正定性的限制, 这对降低结论的保守性起到了重要作用。

本文在文献[25]的基础上在增广向量 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 中引入双重积分项 $\int_{-\tau_1}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}(s) ds d\theta, \dots, \int_{-\tau_m}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}(s) ds d\theta$, 充分利用更多的时滞信息。为充分考虑多时滞间的信息耦合, 与文献[28]相比, 本文在 $V_3(t)$ 中引入双重积分项 $\sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \int_{t-\tau_{j+1}}^t \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_{j,j+1} \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta$, 这些均有助于降低结论的保守性。

沿着系统(5)解轨线对 $V(x)$ 求导可得

$$\dot{V}_1(t) = 2\boldsymbol{\eta}^T(t) \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\xi}^T(t) \text{Sym}\{\boldsymbol{\Pi}_1^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Pi}_2\} \boldsymbol{\xi}(t) \quad (12)$$

$$\dot{V}_2(t) = \boldsymbol{\xi}^T(t) \left[\sum_{i=1}^m (\mathbf{e}_i^T \tau_i \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}^T \tau_i \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_{i+1}) \right] \boldsymbol{\xi}(t) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) = & \dot{\mathbf{x}}^T(t) \left[\sum_{i=1}^m \tau_i^3 \mathbf{R}_i + \sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j)^2 \mathbf{R}_{j,j+1} \right] \dot{\mathbf{x}}(t) - \\ & \sum_{i=1}^m \tau_i^2 \int_{t-\tau_i}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{x}}(s) ds - \\ & \sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \int_{t-\tau_{j+1}}^{t-\tau_j} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_{j,j+1} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{V}_4(t) = \dot{\mathbf{x}}^T(t) \left(\sum_{i=1}^m \frac{\tau_i^2}{2} \mathbf{S}_i \right) \dot{\mathbf{x}}(t) - \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t \int_{\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta \quad (15)$$

由引理 1 和引理 2 对式(14)中的积分项估计得

$$-\sum_{i=1}^m \tau_i^2 \int_{t-\tau_i}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq -\boldsymbol{\xi}^T(t) \left(\sum_{i=1}^m \boldsymbol{\Pi}_3^T \tau_i \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Pi}_3 \right) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (16)$$

$$-\sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \int_{t-\tau_{j+1}}^{t-\tau_j} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_{j,j+1} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \leq -\boldsymbol{\xi}^T(t) \left(\sum_{j=1}^{m-1} \boldsymbol{\Pi}_4^T \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Pi}_4 \right) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (17)$$

由引理 3 对式(15)中的积分项估计得

$$-\sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t \int_{\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{S}_i \dot{\mathbf{x}}(s) ds d\theta \leq -\boldsymbol{\xi}^T(t) \left(\sum_{i=1}^m (2\boldsymbol{\Pi}_5^T \mathbf{S}_i \boldsymbol{\Pi}_5 + 4\boldsymbol{\Pi}_6^T \mathbf{S}_i \boldsymbol{\Pi}_6) \right) \boldsymbol{\xi}(t) \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t) = & \left[\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau_1) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(t - \tau_m) \quad \frac{1}{\tau_1} \int_{t-\tau_1}^t \mathbf{x}^T(s) ds \rightarrow \right. \\ & \leftarrow \dots \quad \frac{1}{\tau_m} \int_{t-\tau_m}^t \mathbf{x}^T(s) ds \quad \frac{1}{\tau_1^2} \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) ds d\theta \rightarrow \\ & \left. \leftarrow \dots \quad \frac{1}{\tau_m^2} \int_{-\tau_m}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) ds d\theta \right]^T \end{aligned}$$

注 2: 在对形如式(14)的积分项处理时, 文献[25]使用 Wirtinger 积分不等式进行放缩处理, 而本文选择基于辅助函数的单重积分不等式进行处理, 相较于 Wirtinger 积分不等式, 增加了 $[5/(b-a)] \boldsymbol{\chi}_3^T \mathbf{M} \boldsymbol{\chi}_3$ 项, 从而建立 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{x}(t - \tau_m)$ 、 $\int_{t-\tau_m}^t \mathbf{x}^T(s) ds$ 与双重积分项 $\int_{-\tau_m}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) ds d\theta$ 之间的联系, 能够使

$-\sum_{i=1}^m \tau_i^2 \int_{t-\tau_i}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_i \dot{\mathbf{x}}(s) ds$ 被更精确地估计, 有利于降低结论的保守性。同时, 在对多时滞二重积分耦合项的导数 $-\sum_{j=1}^{m-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \int_{t-\tau_{j+1}}^{t-\tau_j} \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R}_{j,j+1} \dot{\mathbf{x}}(s) ds$ 进行估计时, 文献[22,28]通过引入一个 n 维的向量值函数 $\mathbf{N}_k(s)$, $k=1, 2, \dots, m$ 来处理此积分项, 而本文利用 Jensen 不等式进行估计, 直接得到 $\mathbf{x}(t - \tau_1) \dots \mathbf{x}(t - \tau_m)$ 之间的交叉关系, 避免引入过多形如 $\mathbf{N}_j^{i,j}$ ($0 \leq i < j \leq m$) 的自由矩阵, 降低了计算过程的复杂度。

综合式(12)一式(18)可得

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\xi}^T(t) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\xi}(t) + \dot{\mathbf{x}}^T(t) \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (19)$$

对式(19)进一步运用 Schur 补引理, 则式(19)等价于式(7), 则系统(5)渐近稳定, 证明完毕。

当式(5)中 $m=1$ 时, 可得如下单时滞系统模型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - \tau) \\ \mathbf{x}(t+\theta) = \boldsymbol{\phi}(t, \theta), \theta \in [-\tau, 0) \end{cases} \quad (20)$$

通过采用与定理 1 类似的推导方法, 可得如下推论 1。

推论 1: 对于任意时滞常数 $\tau > 0$, 若存在对称矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$, $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$, 使得以下线性矩阵不等式成立, 则系统(20)渐近稳定。

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,1} + 6\tau^2 \mathbf{R} & \mathbf{P}_{1,2} + 6\tau \mathbf{R} & \mathbf{P}_{1,3} - 24\mathbf{R} \\ * & \mathbf{P}_{2,2} + 18\mathbf{R} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}_{2,3} - \frac{48}{\tau} \mathbf{R} \\ * & * & \mathbf{P}_{3,3} + \frac{144}{\tau^2} \mathbf{R} \end{bmatrix} > 0 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\Psi} \\ * & -\bar{\Psi} \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

式中:

$$\bar{\Phi} = \text{Sym}\{\bar{\Pi}_1^T \mathbf{P} \bar{\Pi}_2\} + \mathbf{e}_1^T \tau \mathbf{Q} \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2^T \tau \mathbf{Q} \mathbf{e}_2 -$$

$$\bar{\Pi}_3^T \tau \hat{\mathbf{R}} \bar{\Pi}_3 - 2\bar{\Pi}_5^T \mathbf{S} \bar{\Pi}_5 - 4\bar{\Pi}_6^T \mathbf{S} \bar{\Pi}_6$$

$$\text{Sym}\{\bar{\Pi}_1^T \mathbf{P} \bar{\Pi}_2\} = \bar{\Pi}_1^T \mathbf{P} \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_2^T \mathbf{P} \bar{\Pi}_1$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \text{diag}\{\mathbf{R}, 3\mathbf{R}, 5\mathbf{R}\}, \bar{\Psi} = \tau^3 \mathbf{R} + \frac{\tau^2}{2} \mathbf{S}$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}], \bar{\Pi}_1 = [\mathbf{e}_1^T \ \tau \mathbf{e}_3^T \ \tau^2 \mathbf{e}_4^T]^T$$

$$\bar{\Pi}_2 = [\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}_0^T + \mathbf{e}_2^T \mathbf{A}_1^T \quad (\mathbf{e}_1^T - \mathbf{e}_2^T) \quad \tau(\mathbf{e}_1^T - \mathbf{e}_3^T)]^T$$

$$\bar{\Pi}_3 = [\bar{\mathbf{Q}}_1^T \quad \bar{\mathbf{Q}}_2^T \quad \bar{\mathbf{Q}}_3^T]^T, \bar{\Pi}_5 = [\mathbf{e}_1^T - \mathbf{e}_3^T]^T$$

$$\bar{\Pi}_6 = [\mathbf{e}_1^T + 2\mathbf{e}_3^T - 6\mathbf{e}_4^T]^T, \bar{\mathbf{Q}}_1 = [\mathbf{e}_1^T - \mathbf{e}_2^T]^T$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_2 = [\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2^T - 2\mathbf{e}_3^T]^T, \bar{\mathbf{Q}}_3 = [\mathbf{e}_1^T - \mathbf{e}_2^T + 6\mathbf{e}_3^T - 12\mathbf{e}_4^T]^T$$

$$\mathbf{e}_i = [\mathbf{0}_{n \times (i-1)n} \quad \mathbf{I}_n \quad \mathbf{0}_{n \times (4-i)n}]^T, i=1,2,3,4$$

若不将 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 和 $V_{31}(t)$ 作为整体来考虑泛函正定性, 而是令泛函矩阵 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q}_i 、 \mathbf{R}_i 均正定, 可得如下推论 2。

推论 2 对于任意时滞常数 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, 如果存在对称矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{(2m+1)n \times (2m+1)n} > 0$, $\mathbf{Q}_i \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$ 、 $\mathbf{R}_i \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$ 、 $\mathbf{S}_i \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$ 、 $\mathbf{R}_{j,j+1} \in \mathbf{R}^{n \times n} > 0$ (其中 $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,m-1$) 使得线性矩阵不等式(7)成立, 则系统(5)渐近稳定。

推论 2 证明过程与定理 1 证明过程相同, 仅省去证明 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 和 $V_{31}(t)$ 整体正定的过程即可。

3 仿真分析

本节分别利用典型二阶时滞系统、单机无穷大

系统以及 WSCC 3 机 9 节点系统进行仿真分析, 验证本文方法的有效性和优越性。

3.1 典型二阶系统

当令式(5)中时滞环节个数 $m=1$ 时, 此时系统为式(20)所示。利用典型的二阶系统验证本文采用的方法在降低结论保守性方面的有效性, 其中:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

文献[28]采用时滞分割的方法, 利用积分不等式估计泛函导数, 没有引入任何自由权矩阵; 文献[25]利用了 Wirtinger 积分不等式处理积分项; 文献[13]和文献[21]均采用基于辅助函数的积分不等式处理泛函导数中的积分项, 不同的是文献[13]使用凸组合技术, 而文献[21]利用 Schur 补引理处理泛函导数中的非线性项。表 1 中给出了利用本文和上述文献方法得到的最大时滞上界, 可以看出本文推论 1 得到的结果大于对比文献, 也大于推论 2 的结果, 更接近系统真实的稳定裕度值 6.1725 s, 从而验证了本文将 $V_1(t)$ 、 $V_2(t)$ 和 $V_{31}(t)$ 作为整体来考虑泛函正定性以及采用的泛函导数处理方法能有效提高系统时滞上界, 进一步降低了结论的保守性。

表 1 不同方法求出的最大时滞值

Table 1 Maximal time delay for different methods

方法	文献[28]	文献[25]	文献[13]	文献[21]	推论 1	推论 2
τ/s	6.0553	6.0590	6.0685	6.1664	6.1689	6.1664

3.2 单机无穷大系统

选用单机无穷大系统。其中, 发电机阻尼系数 $D=5.00$, 励磁回路放大系数 $K_A=180.00$ 和原动机输出功率 $P_m=1.00$ p.u., 具体系统参数引用文献[23]的数据, 其中矩阵见附录 A。

表 2 给出根据不同方法求出的系统最大时滞上界, 从表中数据可看出, 本文推论 1 求出的最大时滞上界 $\tau=68.27$ ms, 大于文献[22-23]和文献[28]所得结果, 从而验证本文的方法降低了结论的保守性。

表 2 不同方法求出的最大时滞值

Table 2 Maximal time delay for different methods

方法	文献[22]	文献[23]	文献[28]	推论 1
τ/ms	65.40	68.16	68.25	68.27

取时滞为 68.27 ms 时, 发电机功角和暂态电势的响应曲线图如图 1 和图 2 所示。可以看出, 当取时滞上界时, 系统逐渐趋于稳定。

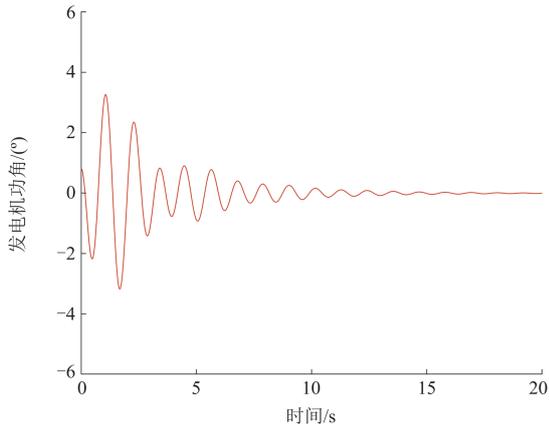


图1 时滞为 68.27 ms 时发电机功角响应曲线

Fig. 1 Response curves of rotor angle with time delay of 68.27 ms

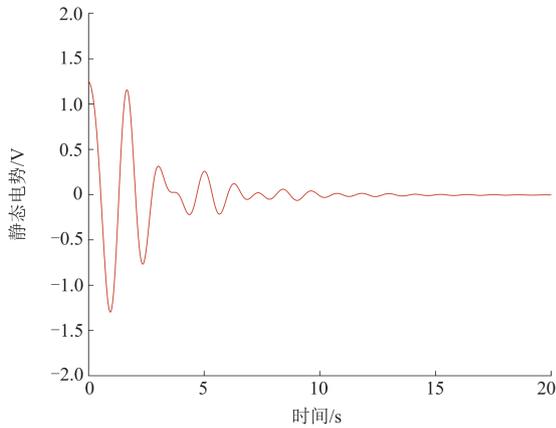


图2 时滞为 68.27 ms 时暂态电势响应曲线

Fig. 2 Response curves of transient voltage with time delay of 68.27 ms

3.3 双时滞典型二阶系统

当式(5)中的时滞环节个数 $m=2$ 时, 利用典型的二阶系统验证本文采用的方法在降低结论保守性方面的有效性, 其中:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.6 \\ -0.4 & -1.0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

表3给出了根据不同方法求出的典型二阶时滞系统的稳定裕度。表中 $\theta = \arctan(\tau_2/\tau_1)$, $L = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ 。从表3中可以看出, 本文定理1所得结果明显优于文献[22-23,28]和本文推论2的结果。如双时滞角度 $\theta = 20^\circ$ 时, 文献[22-23,28]和推论2的时滞稳定裕度 L 分别为 3.2466 s、4.7567 s、4.3717 s 和 7.0226 s,

而本文定理1得到的时滞稳定裕度为 7.6453 s, 从而验证本文的方法有效扩大了时滞稳定裕度, 降低了结论的保守性。

表3 典型二阶时滞系统的稳定裕度比较

Table 3 Stability margin comparison of typical second-order delay system

$\theta/^\circ$	时滞稳定裕度 L/s				
	文献[22]	文献[23]	文献[28]	定理1	推论2
5	2.4060	2.7227	2.8742	7.1406	6.1959
10	2.6208	3.0671	3.2209	7.3072	6.5140
15	2.8977	3.7705	3.6949	7.3666	6.7825
20	3.2466	4.7567	4.3717	7.6453	7.0226
25	3.6709	4.9455	5.3990	7.5043	6.8693
30	4.1390	5.0819	6.2686	6.7998	6.4045
35	4.6839	6.1104	7.3199	7.3995	6.9246
40	5.1596	6.1003	6.6222	7.4627	7.2233
45	6.3241	7.4960	8.0858	8.7242	8.7207
50	4.9438	5.5049	5.7777	6.9419	6.7956

3.4 WSCC 3机9节点系统

选用 WSCC 3机9节点系统, 系统结构图如图3所示。

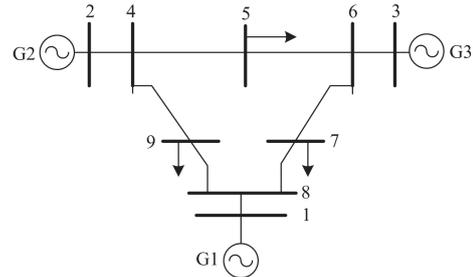


图3 WSCC 3机9节点系统接线图

Fig. 3 Wiring diagram of WSCC 3-generator 9-bus system

将发电机 2、3 均利用自身机端电压幅值和母线 8 的电压幅值(视为远程反馈控制信号)共同构成励磁控制系统的控制信号。发电机 1 处理为无穷大母线, 发电机 2 与发电机 3 的动态方程如下:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_s \\ 2H_i \dot{\omega}_i = P_{mi} - (E'_{qi} - X'_{di} I_{di}) I_{qi} - (E'_{di} + X'_{qi} I_{qi}) I_{di} - D_i (\omega_i - \omega_s) \\ T'_{d0i} \dot{E}'_{qi} = -E'_{qi} - (X_{di} - X'_{di}) I_{di} + E_{fdi} \\ T'_{q0i} \dot{E}'_{di} = -E'_{di} + (X_{qi} - X'_{qi}) I_{qi} \\ T_{Ai} \dot{E}_{tdi} = -E_{tdi} + K_{Ai} (V_{refi} - V_{Gi}) \end{cases} \quad (23)$$

式中, $i=2,3$, 其他各参数代表的含义见文献[23] 其中矩阵 \mathbf{A}_0 、 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 的取值见附录 B。反馈到发电机 2 和发电机 3 励磁控制回路中的电压 V_8 , 分别存在时滞 τ_2 和 τ_3 。

根据不同方法求出电力系统的时滞稳定裕度, 结果如表 4 所示。表中 $\alpha = \arctan(\tau_3 / \tau_2)$, $\beta = \sqrt{\tau_2^2 + \tau_3^2}$, 其中 α 、 β 分别表示双时滞角度和时滞稳定裕度。

表 4 保证 WSCC 3 机 9 节点系统渐近稳定的时滞范围
Table 4 Delay range guaranteeing asymptotic stability of WSCC 3-generator 9-bus system

$\alpha/(^\circ)$	时滞稳定裕度 β/s			
	文献[28]	文献[22]	定理 1	真实值
0	—	0.0591	—	0.0599
10	0.0478	0.0483	0.0486	0.0487
20	0.0415	0.0423	0.0426	0.0426
30	0.0378	0.0390	0.0391	0.0391
40	0.0342	0.0373	0.0374	0.0375
50	0.0312	0.0368	0.0371	0.0372
60	0.0319	0.0376	0.0379	0.0380
70	0.0337	0.0398	0.0403	0.0404
80	0.0372	0.0441	0.0447	0.0448
90	0.0419	0.0518	0.0523	0.0526

从表 4 中可以看出, 双时滞角度 α 在 $0\sim 90^\circ$ 范围内变化时, 时滞的稳定裕度随着角度的增大具有先减小后增大的趋势。且从表中可以看出, 本文定理 1 所提方法优于文献[22]和文献[28]的方法, 所得到的时滞上界更大, 更接近真实值。

3.5 决策变量数对比

多时滞系统稳定性分析往往需要引入较多的决策变量, 在一定程度上会增大计算量、降低计算效率。因此, 多时滞系统的稳定性判据在追求尽可能大的稳定裕度的同时, 还需尽量减少决策变量个数以减少计算量。表 5、表 6 将本文稳定性判据的决策变量个数与相关文献进行对比。从表 6 中可以看出, 当系统阶数 n 取 2、3、4, 系统时滞个数 m 分别取 1~5 时, 定理 1 决策变量个数略大于文献[21]和文献[28]决策变量个数, 但比文献[22]判据 2、文献[23]小, 特别当系统阶数和时滞个数较大时尤为

表 5 决策变量个数表达式

Table 5 Expression for the number of decision variables

方法	决策变量个数
文献[21]	$(2m^2 + 3m + 0.5)n^2 + (2m + 0.5)n$
文献[22]判据 2	$(0.25m^3 + 2.25m^2 + 2.5m + 0.5)n^2 + (0.25m^3 + 0.75m^2 + m + 0.5)n$
文献[23]	$(2m^2 + 8.5m - 1.5)n^2 + (4.5m - 0.5)n$
文献[28]	$(8m + 2)n^2 + (4m + 1)n$
定理 1	$(2m^2 + 4m)n^2 + 3mn$

表 6 不同阶数不同时滞个数系统决策变量对比

Table 6 Comparison of decision variables of systems with different order and different number of delays

n	m	文献[21]	文献[22]判据 2	文献[23]	文献[28]	定理 1
2	1	27	27	44	50	30
2	2	67	81	111	90	76
2	3	123	174	194	130	138
2	4	195	315	293	170	216
2	5	283	513	408	210	310
3	1	57	57	93	105	63
3	2	144	171	237	189	162
3	3	267	366	417	273	297
3	4	426	660	633	357	468
3	5	621	1071	885	441	675
4	1	98	98	160	180	108
4	2	250	294	410	324	280
4	3	466	628	724	468	516
4	4	746	1130	1102	612	816
4	5	1090	1830	1544	756	1180

明显。结合 3.1—3.4 节中稳定裕度的对比可知, 本文的稳定性判据较部分文献虽然增加了决策变量个数, 在一定程度上加大了计算量, 但却得到了更大的时滞上界。

4 结语

本文研究了多时滞影响下的广域电力系统稳定性问题。通过将电力系统中的状态变量、时滞信息及状态变量在时滞区间上的积分等信息引入泛函中, 构造了包含多时滞积分项相互耦合的增广型 L-K 泛函。增广项不仅充分利用了时滞信息, 而且建立了不同变量间的耦合关系, 变量间的耦合将会使稳定性判据中的线性矩阵非对角线位置上产生更多的元素, 这对提高时滞上界、降低结论的保守性至关重要。为进一步降低保守性, 将构造的部分泛函综合起来, 整体考虑其正定性, 放松了传统方法中对所有泛函矩阵必须正定的限制, 并选择能与构造的泛函有效配合的积分不等式对泛函导数进行精确估计, 最终得到了具有较小保守性的多时滞电力系统稳定性判据。最后通过对典型二阶时滞系统、单机无穷大系统以及 WSCC 3 机 9 节点系统进行仿真分析, 验证了本文所提方法的有效性和优越性。在后续的研究中将考虑随机时滞、多时变时滞电力系统在受到不确定性扰动情况下的稳定性问题。

附录 A 单机无穷大系统相关矩阵参数

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 376.9911 & 0 & 0 \\ -0.0963 & -0.5000 & -0.0801 & 0 \\ -0.0480 & 0 & -0.1667 & 0.1000 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38.0187 & 0 & -95.2560 & 0 \end{bmatrix}$$

附录 B WSCC3 机 9 节点系统相关矩阵参数

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 377 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1421 & -0.0039 & -0.0249 & -0.1097 & 0 & 0.1009 & 0 & 0.1202 & 0.0594 & 0 \\ -0.0096 & 0 & -0.2233 & 0.0536 & 0.1667 & 0.1549 & 0 & 0.4965 & 0.0116 & 0 \\ -1.8167 & 0 & 0.2657 & -5.0227 & 0 & 0.9126 & 0 & 0.2903 & 0.7403 & 0 \\ 0 & 0 & -2307.3912 & 962.2607 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 377 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2157 & 0 & 0.2061 & 0.1216 & 0 & -0.347 & -0.0083 & -0.0708 & -0.2916 & 0 \\ 0.1444 & 0 & 0.378 & 0.0173 & 0 & -0.0057 & 0 & -0.1092 & 0.0248 & 0.125 \\ 2.3717 & 0 & 0.4298 & 1.8275 & 0 & -5.5476 & 0 & -0.2416 & -14.2578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2358.2911 & 829.7367 & -50 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -257.8282 & 0 & 161.8154 & -600.5298 & 0 & -191.1358 & 0 & -1016.6381 & 88.5849 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -274.9832 & 0 & -879.6285 & 9.6697 & 0 & -139.8803 & 0 & -43.9157 & -342.2694 & 0 \end{bmatrix}$$

参考文献

- [1] 袁明军, 江浩, 黎强, 等. 四统一四规范同步相量测量装置关键技术研究[J]. 电力系统保护与控制, 2019, 47(4): 182-187.
YUAN Mingjun, JIANG Hao, LI Qiang, et al. Research on key technology of four unified four standard phasor measurement unit[J]. Power System Protection and Control, 2019, 47(4): 182-187.
- [2] 李志豪, 陈皓勇. 基于 PMU 量测的配电网稀疏估计[J]. 电力系统保护与控制, 2020, 48(23): 11-20.
LI Zhihao, CHEN Haoyong. Sparse estimation of a distribution network based on PMU measurement[J]. Power System Protection and Control, 2020, 48(23): 11-20.
- [3] 姜赫, 安军, 李德鑫, 等. 基于 WAMS 实测数据的电

- 力系统仿真致差区域识别方法[J]. 电力系统保护与控制, 2021, 49(4): 96-103.
- JIANG He, AN Jun, LI Dexin, et al. Recognition method of power system simulation error area based on WAMS measured data[J]. Power System Protection and Control, 2021, 49(4): 96-103.
- [4] 李晶, 杨亮. 基于 MMC-STATCOM 的广域电压控制研究[J]. 供用电, 2021, 38(12): 49-54, 63.
- LI Jing, YANG Liang. Research on wide-area voltage control based on MMC-STATCOM[J]. Distribution & Utilization, 2021, 38(12): 49-54, 63.
- [5] 张晓英, 高金, 王琨, 等. 基于电压时间序列的电力系统暂态电压稳定分析[J]. 智慧电力, 2021, 49(3): 51-58.
- ZHANG Xiaoying, GAO Jin, WANG Kun, et al. Transient voltage stability analysis of power system based on voltage time series[J]. Smart Power, 2021, 49(3): 51-58.
- [6] 汪豪, 钱伟, 郭建峰, 等. 变时滞影响下广域电力系统的 H_∞ 控制[J]. 电力系统保护与控制, 2021, 49(18): 70-81.
- WANG Hao, QIAN Wei, GUO Jianfeng, et al. H_∞ control for a wide-area power system with time-varying delay[J]. Power System Protection and Control, 2021, 49(18): 70-81.
- [7] 孙国强, 屠越, 孙永辉, 等. 时变时滞电力系统鲁棒稳定性的改进型判据[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(3): 59-62.
- SUN Guoqiang, TU Yue, SUN Yonghui, et al. An improved robust stability criterion for power systems with time-varying delay[J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39(3): 59-62.
- [8] 熊林云, 王杰. 三区延迟电力系统鲁棒负荷频率控制研究[J]. 电网技术, 2018, 42(3): 894-902.
- XIONG Linyun, WANG Jie. Study of load frequency control for three-area time-delayed power system[J]. Power System Technology, 2018, 42(3): 894-902.
- [9] LI Chongtao, DUAN Chao, CAO Yulei. An efficient method for computing exact delay-margins of large-scale power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(6): 4924-4927.
- [10] 张芳, 杨丰瑜, 姚文鹏. 基于时滞稳定裕度的柔性直流系统高频稳定性分析[J]. 电力系统及其自动化学报, 2022, 34(5): 125-135.
- ZHANG Fang, YANG Fengyu, YAO Wenpeng. High-frequency stability analysis of MMC-HVDC system based on delay stability margin[J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2022, 34(5): 125-135.
- [11] 曹靖泓, 董朝宇, 肖迁, 等. 考虑控制与通信多成分时滞的多端 MMC-HVDC 信息物理系统统一建模与互联稳定性分析[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(10): 3547-3560.
- CAO Jingming, DONG Chaoyu, XIAO Qian, et al. State modeling and stability analysis of the multi-terminal MMC-HVDC cyber-physical system considering the control and communication delay[J]. Proceedings of the CSEE, 2021, 41(10): 3547-3560.
- [12] 陈亦平, 皮杰明, 李崇涛, 等. 考虑 AGC 采样保持特性的时滞电力系统频率稳定性分析[J/OL]. 电网技术: 1-9[2022-10-12].
<https://doi.org/10.13335/j.1000-3673.pst.2022.0922>.
- CHEN Yiping, PI Jieming, LI Chongtao, et al. Frequency stability analysis of time-delay power systems considering sampling and holding characteristics of AGC[J/OL]. Power System Technology: 1-9[2022-10-12]. <https://doi.org/10.13335/j.1000-3673.pst.2022.0922>.
- [13] 钱伟, 吴嘉欣, 费树岷. 基于时滞依赖矩阵泛函的变时滞电力系统稳定性分析[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(1): 53-58.
- QIAN Wei, WU Jiabin, FEI Shumin. Analysis on power systems stability with time-varying delay based on delay-dependent matrix functional[J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(1): 53-58.
- [14] 李宁, 孙永辉, 卫志农, 等. 基于 Wirtinger 不等式的电力系统延时时滞稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2017, 41(2): 108-113.
- LI Ning, SUN Yonghui, WEI Zhinong, et al. Delay-dependent stability criteria for power system based on Wirtinger integral inequality[J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(2): 108-113.
- [15] 马静, 李俊臣, 李益楠, 等. 基于改进自由权矩阵与广义特征值的时滞稳定上限计算方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(18): 1-8.
- MA Jing, LI Junchen, LI Yinan, et al. Research on time-delay upper-bound of power system wide-area damping controllers based on improved free-weighting matrices and generalized eigenvalue problem[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(18): 1-8.
- [16] 钱伟, 王晨晨, 费树岷. 区间变时滞广域电力系统稳定性分析与控制器设计[J]. 电工技术学报, 2019, 34(17): 3640-3650.
- QIAN Wei, WANG Chenchen, FEI Shumin. Stability analysis and controller design of wide-area power system with interval time-varying delay[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2019, 34(17): 3640-3650.
- [17] 钱伟, 蒋鹏冲. 时滞电力系统带记忆反馈控制方法[J]. 电网技术, 2017(11): 3605-3611.
- QIAN Wei, JIANG Pengchong. A method of memory feedback control for power system with time-delay[J]. Power System Technology, 2017(11): 3605-3611.

- [18] YAO W, JIANG L, WU Q, et al. Delay-dependent stability analysis of the power system with a wide-area damping controller embedded[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(1): 233-240.
- [19] WANG Nan, QIAN Wei, XU Xiaozhuo. H_∞ performance for load frequency control systems with random delays[J]. Systems Science & Control Engineering, 2021, 9(1): 243-259.
- [20] PENG Chen, ZHANG Jin. Delay-distribution-dependent load frequency control of power systems with probabilistic interval delays[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(4): 3309-3317.
- [21] 李啸骢, 王夏明. 基于积分不等式多时滞电力系统的改进稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(1): 59-66.
LI Xiaocong, WANG Xiaming. Integral inequality based improved stability criterion for power system with multiple time delays[J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(1): 59-66.
- [22] JIANG Yilang, JIANG Tao, JIA Hongjie, et al. A novel LMI criterion for power system stability with multiple time-delays[J]. Science China (Technological Sciences), 2014, 57(7): 1392-1400.
- [23] 董朝宇, 贾宏杰, 姜懿郎. 含积分二次型的电力系统改进时滞稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(24): 35-40.
DONG Chaoyu, JIA Hongjie, JIANG Yilang. Time-delay stability criteria for power system with integral quadratic form[J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39(24): 35-40.
- [24] 王蕾, 贾宏杰, 董朝宇. 基于权值评估的 Lyapunov 时滞稳定判据改进方法[J]. 电力系统自动化, 2017, 41(16): 111-116.
WANG Lei, JIA Hongjie, DONG Chaoyu. Method for improving efficiency of delay stability criterion based on weight value analysis of Lyapunov functional items[J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(16): 111-116.
- [25] 孙永辉, 李宁, 卫志农, 等. 多时滞不确定电力系统的改进时滞依赖鲁棒稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2017, 41(16): 117-122.
SUN Yonghui, LI Ning, WEI Zhinong, et al. Improved robust delay-dependent stability criteria for power systems with multiple time delays and uncertain parameters[J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(16): 117-122.
- [26] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. Stability of time-delay systems[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2003.
- [27] PARK P G, LEE W I, LEE S Y. Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(4): 1378-1396.
- [28] 李晓萌, 贾宏杰. 电力系统改进时滞依赖型鲁棒稳定判据[J]. 电力系统及其自动化学报, 2018, 30(4): 114-120.
LI Xiaomeng, JIA Hongjie. Improved time delay dependent robust stability criteria for power system[J]. Proceedings of the CSU-EPSCA, 2018, 30(4): 114-120.

收稿日期: 2022-08-21; 修回日期: 2022-11-11

作者简介:

郭建锋(1980—), 男, 博士研究生, 研究方向为电力系统分析与控制; E-mail: gjf@hpu.edu.cn

钱伟(1978—), 男, 通信作者, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为鲁棒控制、智能控制等; E-mail: qwei@hpu.edu.cn

费树岷(1961—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性系统分析与控制。E-mail: smfei@seu.edu.cn

(编辑 魏小丽)