

DOI: 10.7667/PSPC162074

# 基于降维 Carleman 嵌入技术的电力系统高阶变量交互作用分析研究

王州强<sup>1,2</sup>, 黄琦<sup>1</sup>, 张其群<sup>3</sup>

(1. 电力系统广域测量与控制四川省重点实验室, 电子科技大学, 四川 成都 611731; 2. 四川省装备制造业机器人应用技术工程实验室, 四川工程职业技术学院, 四川 德阳 618000; 3. 四川中水能源有限公司, 四川 成都 610041)

**摘要:** 引入 Carleman 嵌入式分析技术, 导出降维 Carleman 线性化模型。利用线性化理论得到非线性模式、单状态变量的时域解及相应非线性参与因子, 导出了高阶状态变量的解析解, 并进一步将参与因子的概念拓展到高阶变量非线性参与因子。研究结果可用于研究电力系统的非线性动态特性, 揭示和评估量化各模式以及各状态变量之间的非线性交互作用。最后, 利用该方法分析了一个电力系统仿真算例, 并与 Prony 分析进行了对比。通过分析各阶状态变量时域响应和相应的参与因子, 对比研究系统工况发生变化时特征模式空间的变化, 验证了所研究方法的有效性。

**关键词:** Carleman 嵌入技术; 电力系统; 交互作用; 高阶变量; 参与因子; Prony

## Analysis of power system higher-order variables and interaction based on reduced Carleman embedding technology

WANG Zhouqiang<sup>1,2</sup>, HUANG Qi<sup>1</sup>, ZHANG Qiqun<sup>3</sup>

(1. Sichuan Provincial Key Lab of Power System Wide-area Measurement and Control, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China; 2. Robot Application Engineering Lab of Sichuan Provincial Equipment Manufacturing Industry, Sichuan Engineering Technical College, Deyang 618000, China; 3. Sichuan Zhongshui Energy Co., Ltd, Chengdu 610041, China)

**Abstract:** The reduced Carleman linearization model is provided after introducing the Carleman embedding technology. The nonlinear modes and the time response of single state variables and corresponding nonlinear participation factors are given. The higher-order state variables are deduced and the concept of participation factors is developed to nonlinear participation factors of higher-order state variables. These results can be used to study the nonlinear dynamic performances and evaluate the interactions between each mode and variable. Finally, the proposed method is used to study a power system simulation case and compared with Prony analysis. Through analyzing time domain solutions of every order variable and corresponding participation factors, and comparing the changes of eigenvalues space when system's operating condition changes, it verifies the validity of the method.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 51277022).

**Key words:** Carleman embedding; power system; interaction; higher-order variables; participation factor; Prony

## 0 引言

随着电网互联规模的日益扩张以及大量的非线性设备(电力电子装置)的增多, 对现代电力系统振荡现象进行有效地分析变得越来越困难<sup>[1-4]</sup>。同时,

长期以传统小信号线性模态分析为基础的低频振荡方法, 给出系统的1阶基本模态、振荡模式和参与因子, 是电力系统控制器设计与配置的重要依据。然而, 小信号线性分析方法因自身存在缺陷, 采用截断的1阶线性模型代替原非线性模型, 无法考虑非线性结构特性对系统动态特性和稳定性的影响, 进而影响系统控制器设计的正确性与有效性。

基金项目: 国家自然科学基金(51277022)

针对这一问题,大量的研究<sup>[5-10]</sup>表明非线性的影响是不可忽视的,所采用的方法和手段,包括正规形理论和模态级数理论,被运用到电力系统非线性模型的高阶模态分析之中。尽管如此,这些理论需要经过较为复杂的非线性方法(如,非线性变换和高维拉普拉斯变换)处理系统的模型状态方程。

本文采用 Carleman 线性化理论<sup>[11-12]</sup>,应用其独特的嵌入技术产生由原始状态变量交互而成的高阶新状态变量及其状态方程,从而将分析非线性电力系统的传统线性模型拓展为一个无限维的线性化模型。这样,就可直接运用线性理论分析 Carleman 线性模型,轻松地获得诸如高阶特征模态、高阶振荡模式、高阶状态变量轨迹和非线性参与因子等非线性信息。这些非线性信息可以揭示原非线性系统的模态交互作用机理,为探索分析系统低频超高频振荡问题与模态交互作用之间的联系提供了新方法、新途径。

## 1 数学预备知识

定义<sup>[11]</sup>:设矩阵  $A=(a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$  和  $B=(b_{ij}) \in \mathbf{R}^{p \times q}$ , 则  $A$  和  $B$  的 Kronecker 积定义如下:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} = (a_{ij}B) \in \mathbf{R}^{mp \times nq}$$

令向量  $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , 则有:

$$X \otimes X = [\underbrace{x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_n}_{n \text{ 项}}, \underbrace{x_2x_1, x_2^2, \dots, x_2x_n}_{n \text{ 项}},$$

$$\underbrace{x_3x_1, x_3x_2, \dots, x_3x_n}_{n \text{ 项}}, \dots, \underbrace{x_nx_1, x_nx_2, \dots, x_n^2}_{n \text{ 项}}]^T \in \mathbf{R}^{n^2}$$

$$X \otimes X \otimes X = [\underbrace{x_1^3, x_1^2x_2, \dots, x_1^2x_n}_{n \text{ 项}}, \underbrace{x_1x_2x_1, x_1x_2^2, \dots, x_1x_2x_n}_{n \text{ 项}}, \dots,$$

$$\underbrace{x_2x_1^2, x_2x_1x_2, \dots, x_2x_1x_n}_{n \text{ 项}}, \dots, \underbrace{x_n^2x_1, x_n^2x_2, \dots, x_n^2}_{n \text{ 项}}]^T \in \mathbf{R}^{n^3}$$

不难发现,在  $X \otimes X$  中,对于  $i \neq j$ , 所有结果项  $x_i x_j$  总是重复出现的;在  $X \otimes X \otimes X$  中,对于  $i \neq j$  或  $i \neq l$  或  $j \neq l$ , 所有结果项  $x_i x_j x_l$  总是重复出现的。因此,去除  $X \otimes X$  和  $X \otimes X \otimes X$  中的重复项,从而避免 Carleman 模型中变量冗余,这里定义向量的降维 Kronecker 积为

$$X \tilde{\otimes} X = [\underbrace{x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_n}_{n \text{ 项}}, \underbrace{x_2^2, \dots, x_2x_n}_{(n-1) \text{ 项}}, \dots, \underbrace{x_n^2}_{1 \text{ 项}}]^T \in \mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$X \tilde{\otimes} X \tilde{\otimes} X = [\underbrace{x_1^3, x_1^2x_2, \dots, x_1^2x_n}_{n \text{ 项}}, \underbrace{x_1x_2^2, \dots, x_1x_2x_n}_{(n-1) \text{ 项}}, \dots, \underbrace{x_1x_n^2}_{1 \text{ 项}}, \dots,$$

$$\underbrace{x_2^3, x_2^2x_3, \dots, x_2^2x_n}_{(n-1) \text{ 项}}, \dots, \underbrace{x_2x_n^2}_{1 \text{ 项}}, \dots, \underbrace{x_n^3}_{1 \text{ 项}}]^T \in \mathbf{R}^{\sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}}$$

为使全文书写简明,仍保留使用符号  $\otimes$  表示降维 Kronecker 积。

## 2 降维 Carleman 线性化模型

### 2.1 电力系统模型表达

电力系统的模型在数学上常采用微分代数方程组来描述,当简化为微分方程组时,可表示为

$$\dot{X} = f(X) \quad (1)$$

式中:  $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为  $n$  维状态向量;  $f(X)=[f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$ ,  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  为一个光滑向量场。

在一稳定平衡点  $X_{\text{sep}}$  附近将式(1)展开成 Taylor 级数。

$$\dot{X} = A_1 X + A_2 (X \otimes X) + A_3 (X \otimes X \otimes X) + \dots \quad (2)$$

式中:  $A_1 = [\partial f / \partial X]_{X_{\text{sep}}} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统雅可比矩阵;  $A_2 = [\partial^2 f / \partial X^2]_{X_{\text{sep}}} \in \mathbf{R}^{n \times m_2}$ ;  $A_3 = [\partial^3 f / \partial X^3]_{X_{\text{sep}}} \in \mathbf{R}^{n \times m_3}$ ;

$$m_2 = n(n+1)/2; \quad m_3 = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}。$$

### 2.2 Carleman 嵌入技术<sup>[11]</sup>

为书写简便,引入下面的记号:

$$X^{[k]} = \underbrace{X \otimes X \otimes \dots \otimes X}_{k \text{ 个之积}} \in \mathbf{R}^{m_k}, \quad k=1,2,\dots \quad (3)$$

这样,由各阶状态的 Kronecker 积组成的新向量为

$$X^{\otimes} \triangleq [X, X^{[2]}, X^{[3]}, \dots, X^{[k]}, \dots]^T \quad (4)$$

其维数为  $\dim(X^{\otimes}) = M = n + m_2 + m_3 + \dots + m_k + \dots$ 。式(2)亦可重写为

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X^{[k]}, \quad A_k \in \mathbf{R}^{n \times m_k} \quad (5)$$

对新向量场(4)求导,第  $j$  阶状态变量方程为

$$\frac{d(X^{[j]})}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{X \otimes X \otimes \dots \otimes X}_{j \text{ 个之积}} \right) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^j) X^{[k+j-1]} \quad (6)$$

式中:  $j=1$  时,  $A_k^1 = A_k$ ;  $j>1$  时,  $A_k^j = A_k \otimes \underbrace{I_n \otimes \dots \otimes I_n}_{(j-1) \text{ 个之积}} +$

$$I_n \otimes A_k \otimes I_n \otimes \dots \otimes I_n + \dots + I_n \otimes \dots \otimes I_n \otimes A_k。$$

从而可以得到一个与原始非线性模型(2)相似的无穷维线性化系统:

$$\dot{X}^{\otimes} = A^{\otimes} X^{\otimes} \quad (7)$$

$$\text{式中, } A^\otimes = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & \cdots & A_k^1 & \cdots \\ 0 & A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_{k-1}^2 & \cdots \\ 0 & 0 & A_1^3 & \cdots & A_{k-2}^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1^k & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{M \times M},$$

$A_1^1$  为原非线性系统的 1 次线性部分。

### 3 非线性模态分析

#### 3.1 模态特征根与时域解析解

不难发现, Carleman 线性化模型系统矩阵  $A^\otimes$  具有上三角结构, 因此当系统(7)被截断到  $k=N$  阶方阵时, 它的特征根可通过行列式求得。

$$|\lambda^\otimes - \lambda I| = |A_1^1 - \lambda I| |A_1^2 - \lambda^2 I| \cdots |A_1^N - \lambda^N I| = 0 \quad (8)$$

可见, Carleman 线性化模型提供了除含 1 阶线性模式的  $A_1^1$  外, 还包含了反映复合模态交互作用的高阶系数矩阵  $A_1^k$ ,  $k=2, \dots, N$ , 即

$$\text{eig}(A^\otimes) = A = \text{diag}(J(\lambda^1), J(\lambda^2), \dots, J(\lambda^N)) \quad (9)$$

式中:

$$J(\lambda^1) = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n])$$

$$J(\lambda^2) = \text{diag}([2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, 2\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, \dots, 2\lambda_n])$$

$$J(\lambda^3) = \text{diag}([3\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, \dots, 3\lambda_2, 2\lambda_2 + \lambda_3, \dots, 3\lambda_n])$$

⋮

令  $U^\otimes$  和  $V^\otimes$  分别是  $A^\otimes$  的右、左特征向量矩阵; 直接运用线性系统理论, 对系统(7)进行相似变换  $X^\otimes = U^\otimes Y^\otimes$ , 可得

$$X^\otimes = U^\otimes e^{At} Y^\otimes(0) = U^\otimes e^{At} V^\otimes X^\otimes(0) \quad (10)$$

其中, 第  $i$  个状态变量的时域解析解为<sup>[12]</sup>

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n u_{ij}^\otimes y_{j0}^1 e^{\lambda_j^1 t} + \sum_{k=n+1}^{n+m_2} u_{ik}^\otimes y_{k0}^2 e^{\lambda_k^2 t} + \sum_{l=n+m_2+1}^{n+m_2+m_3} u_{il}^\otimes y_{l0}^3 e^{\lambda_l^3 t} + \cdots \quad i=1, 2, \dots, n \quad (11)$$

式中:

$$y_{j0}^1 = \sum_{p=1}^{n+m_2+m_3} v_{jp}^\otimes x_p^0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$y_{k0}^2 = \sum_{q=1}^{n+m_2+m_3} v_{kq}^\otimes x_q^0 \quad k=n+1, n+2, \dots, n+m_2$$

$$y_{l0}^3 = \sum_{r=1}^{n+m_2+m_3} v_{lr}^\otimes x_r^0 \quad l=n+m_2+1, n+m_2+2, \dots, n+m_2+m_3$$

$\lambda_j^1 \in J(\lambda^1)$ ,  $\lambda_k^2 \in J(\lambda^2)$  和  $\lambda_l^3 \in J(\lambda^3)$  分别代表了系统的线性基本模式及其因交互作用而产生的 2、3

阶复合模式;  $u_{ij}^\otimes$ 、 $u_{ik}^\otimes$ 、 $u_{il}^\otimes \in U^\otimes$  是  $\lambda_j^1$ 、 $\lambda_k^2$ 、 $\lambda_l^3$  对应的右特征向量元素;  $x_p^0$ 、 $x_q^0$ 、 $x_r^0 \in X^\otimes(0)$  为状态变量初始值;  $y_{j0}^1$ 、 $y_{k0}^2$ 、 $y_{l0}^3 \in Y^\otimes(0)$ ,  $X^\otimes(0) = U^\otimes Y^\otimes(0)$ 。

#### 3.2 高阶变量的时域解析解

在系统响应解(10)中, 除了  $n$  个单状态变量  $x_i(t)$  外, 还有包含了如下的高次状态变量信息。

$$x_s^{[2]}(t) = x_p x_q(t) = \sum_{k=n+1}^{n+m_2} u_{sk}^\otimes y_{k0}^2 e^{\lambda_k^2 t} + \sum_{l=n+m_2+1}^{n+m_2+m_3} u_{sl}^\otimes y_{l0}^3 e^{\lambda_l^3 t} + \cdots \quad (12)$$

$$x_w^{[3]}(t) = x_p x_q x_r(t) = \sum_{l=n+m_2+1}^{n+m_2+m_3} u_{wl}^\otimes y_{l0}^3 e^{\lambda_l^3 t} + \cdots \quad (13)$$

式中:  $x_s^{[2]}(t)$ 、 $x_w^{[3]}(t)$  分别为  $X^\otimes$  第  $s$ 、 $w$  个嵌入状态变量,  $s=n+1, n+2, \dots, n+m_2$ ,  $w=n+m_2+1, n+m_2+2, \dots, n+m_2+m_3$ ; 二次项状态变量  $x_p x_q(t)$  反映了两个变量  $x_p$  和  $x_q$  交互作用的轨迹; 三次项状态变量  $x_p x_q x_r(t)$  反映了变量  $x_p$ 、 $x_q$  和  $x_r$  三者交互作用的轨迹。

#### 3.3 非线性参与因子

线性参与因子  $P_{ij} = u_{ij} v_{ji}$  结合左、右特征向量度量了第  $j$  个模态中第  $i$  个状态变量的参与程度, 在判别低频振荡模式和抑制低频振荡问题中具有重要作用<sup>[13-14]</sup>。其原始定义为: 当状态变量初始值  $X_0 = e_j$  (除第  $j$  个元素为 1, 其他全为 0), 第  $i$  个状态变量  $x_i(t)$  的线性时域解为

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n u_{ij} v_{ji} e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n P_{ij} e^{\lambda_j t} \quad (14)$$

采用 Carleman 线性化方法, 参与因子可以很方便地被拓展到包含 2 阶以上的高阶项。当初始值  $X^\otimes(0) \triangleq [e_j, e_j^{[2]}, e_j^{[3]}, \dots]^T$ , 时域解(11)可以写为

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{p}_{ij}^1 e^{\lambda_j^1 t} + \sum_{k=n+1}^{n+m_2} \tilde{p}_{ik}^2 e^{\lambda_k^2 t} + \sum_{l=n+m_2+1}^{n+m_2+m_3} \tilde{p}_{il}^3 e^{\lambda_l^3 t} + \cdots \quad (15)$$

式中:

$$\tilde{p}_{ij}^1 = u_{ij}^\otimes \left\{ v_{ji}^\otimes + v_{j, \frac{i \times (2n-i+3)}{2}}^\otimes + v_{j, n+i \times m_2+1}^\otimes - \sum_{L=2}^i \frac{(L-2)(2n-L+3)}{2} \right\}$$

$$\tilde{p}_{ik}^2 = u_{ik}^\otimes \left\{ v_{ki}^\otimes + v_{k, \frac{i \times (2n-i+3)}{2}}^\otimes + v_{k, n+i \times m_2+1}^\otimes - \sum_{L=2}^i \frac{(L-2)(2n-L+3)}{2} \right\}$$

$$\tilde{p}_{il}^3 = u_{il}^\otimes \left\{ v_{li}^\otimes + v_{l, \frac{i \times (2n-i+3)}{2}}^\otimes + v_{l, n+i \times m_2+1}^\otimes - \sum_{L=2}^i \frac{(L-2)(2n-L+3)}{2} \right\}$$

可见, 单状态变量的 3 阶响应有三类非线性参与因子。  $\tilde{p}_{ij}^1$  代表第  $i$  个状态变量在第  $j$  线性模态中的参与程度, 其中包含了传统的 1 阶线性参与因子

$u_{ij}^{\otimes} v_{ji}^{\otimes}$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ 。  $\tilde{p}2_{ik}^1$ 、 $\tilde{p}3_{il}^1$  则代表第  $i$  个状态变量分别在第  $k$ 、 $l$  个复合模式中的参与程度。

高阶状态变量时域解(12)、(13)也可写为

$$x_s^2(t) = x_p x_q(t) = \sum_{k=n+1}^{n+m_2} \tilde{p}2_{sk}^2 e^{\lambda_k^2 t} + \sum_{l=n+m_2+1}^{n+m_2+m_3} \tilde{p}3_{sl}^2 e^{\lambda_l^2 t} + \dots (16)$$

$$x_w^3(t) = x_p x_q x_r(t) = \sum_{l=n+m_2+1}^{n+m_2+m_3} \tilde{p}3_{wl}^3 e^{\lambda_l^3 t} + \dots (17)$$

式中:

$$\tilde{p}2_{sk}^2 = u_{sk}^{\otimes} \left\{ v_{k, \frac{s \times (2n-s+3)}{2}}^{\otimes} + v_{k, n+s \times m_2 + 1 - \sum_{L=2}^s \frac{(L-2)(2n-L+3)}{2}}^{\otimes} \right\}$$

$$\tilde{p}3_{sl}^2 = u_{sl}^{\otimes} \left\{ v_{l, n+s \times m_2 + 1 - \sum_{L=2}^s \frac{(L-2)(2n-L+3)}{2}}^{\otimes} \right\}$$

$$\tilde{p}3_{wl}^3 = u_{wl}^{\otimes} \left\{ v_{l, n+w \times m_2 + 1 - \sum_{L=2}^w \frac{(L-2)(2n-L+3)}{2}}^{\otimes} \right\}$$

类似地, 二次状态变量的 3 阶响应有两类非线性参与因子,  $\tilde{p}2_{sk}^2$  和  $\tilde{p}3_{sl}^2$ , 它们代表了第  $s$  个二次变量  $x_p x_q$  分别第  $k$ 、 $l$  个复合模式  $\lambda_k^2$ 、 $\lambda_l^2$  中的参与程度。三次状态变量的 3 阶响应有非线性参与因子  $\tilde{p}3_{wl}^3$  代表了第  $w$  个三次变量  $x_p x_q x_r$  在第  $l$  个复合模式  $\lambda_l^3$  中的参与程度。

这些非线性参与因子不仅能度量某单个变量在线性模式中的参与程度, 而且更能度量高次变量在非线性的参与程度, 是传统线性理论无法得到的。

## 4 仿真分析

### 4.1 算例与特征模式

以 WSCC-9 系统为算例<sup>[14]</sup>, 发电机采用 3 阶模型( $\omega, \delta, E'_q$ ), 励磁系统采用 1 阶模型, 选 1 号发电机为参考, 系统共 11 个单状态变量。0.1 s 时, 在母线 GEN1-230 上设置三相短路接地故障; 0.25 s 时, 扰动结束。

按式(9)计算, 该算例的降维 Carleman 线性化模型(考虑到  $k=N=3$  阶)共有 363 个状态。其中, 系统 1 阶线性特征模式见表 1, 存在 4 对共轭复根, 模式  $\lambda_{4(5)}$  和  $\lambda_{2(3)}$  都是弱阻尼共轭复数特征根, 关联的主要变量为  $\omega_{1\sim 3}$ ,  $\delta_{1\sim 3}$  和  $\omega_{2\sim 3}$ ,  $\delta_{2\sim 3}$ 。模式  $\lambda_{6(7)}$  和  $\lambda_{8(9)}$  关联的主要变量都是  $E'_{q1}$ 、 $E'_{q3}$  以及发电机 1、3 励磁机单元。由 Carleman 线性化分析可知, 这些 1 阶模式之间会复合成新的模式。表 2 列出了部分 2 阶复合特征根  $\lambda_k^2$ , 出现了大量的低频模式甚至是超低频模式, 如由  $\lambda_4$  和  $\lambda_7$  合成的 2 阶复合模式 45(51), 频率 0.19 Hz。表 3 则列出了部分 3 阶复合特征根  $\lambda_l^3$ , 出现大量低频、超低频模式, 如由  $\lambda_2$ 、 $\lambda_7$  和  $\lambda_9$  合成的 3 阶复合模式 186(225), 频率 0.08 Hz。

表 1 系统特征模式

模式	特征根 $\lambda_j^1$	频率/Hz	阻尼比/%
1	-19.060 167	0	100
2,3	-0.111 826±j12.063 696	1.919 997	0.926 924
4,5	-0.033 346±j7.964 903	1.267 654	0.418 655
6,7	-5.261 004±j6.770 876	1.077 618	61.356 026
8,9	-5.180 107±j4.787 777	0.761 998	73.436 953
10	-0.108 179	0	100
11	-1.353 255	0	100

表 2 二阶复合特征模式

模式	特征根 $\lambda_k^2$	频率/Hz	阻尼比/%
23,33	$\lambda_2+\lambda_2=-0.223 65 \pm j 24.127 39$	3.839 99	0.926 92
25,35	$\lambda_2+\lambda_4=-0.145 17 \pm j 20.028 59$	3.187 65	0.724 80
26,34	$\lambda_2+\lambda_5=-0.145 17 \pm j 4.098 795$	0.652 34	3.539 60
30,38	$\lambda_2+\lambda_9=-5.291 93 \pm j 7.275 92$	1.158 00	58.819 75
31,40	$\lambda_2+\lambda_{10}=-0.220 01 \pm j 12.063 70$	1.920 00	1.823 39
42,50	$\lambda_4+\lambda_4=-0.066 69 \pm j 15.929 80$	2.535 31	0.418 65
45,51	$\lambda_4+\lambda_7=-5.294 35 \pm j 1.194 03$	0.190 04	97.549 92
47,53	$\lambda_4+\lambda_9=-5.213 45 \pm j 3.177 13$	0.505 66	85.392 78
48,55	$\lambda_4+\lambda_{10}=-0.141 52 \pm j 7.964 90$	1.267 65	1.776 57
49,56	$\lambda_4+\lambda_{11}=-1.386 60 \pm j 7.964 90$	1.267 65	17.150 92
60,64	$\lambda_6+\lambda_9=-10.441 11 \pm j 1.983 10$	0.315 62	98.243 67
61,66	$\lambda_6+\lambda_{10}=-5.369 18 \pm j 6.770 88$	1.077 62	62.133 63
70,73	$\lambda_8+\lambda_{10}=-5.288 29 \pm j 4.787 78$	0.762 00	74.131 70

表 3 三阶复合特征模式

模式	特征根 $\lambda_l^3$	频率/Hz	阻尼比/%
144,199	$\lambda_2+\lambda_2+\lambda_2=-0.335 48 \pm j 36.191 09$	5.759 99	0.926 93
145,154	$\lambda_2+\lambda_2+\lambda_3=-0.335 48 \pm j 12.063 70$	1.920 00	2.779 83
146,201	$\lambda_2+\lambda_2+\lambda_4=-0.257 00 \pm j 32.092 30$	5.107 65	0.800 78
147,200	$\lambda_2+\lambda_2+\lambda_5=-0.257 00 \pm j 16.162 49$	2.572 34	1.589 89
148,203	$\lambda_2+\lambda_2+\lambda_6=-5.484 66 \pm j 30.898 27$	4.917 61	17.477 5
155,156	$\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=-0.257 00 \pm j 7.964 90$	1.267 65	3.224 96
163,216	$\lambda_2+\lambda_4+\lambda_4=-0.178 52 \pm j 27.993 50$	4.455 30	0.637 70
164,209	$\lambda_2+\lambda_4+\lambda_5=-0.178 52 \pm j 12.063 70$	1.920 00	1.479 63
186,225	$\lambda_2+\lambda_7+\lambda_9=-10.552 94 \pm j 0.505 04$	0.080 38	99.885 7
244,280	$\lambda_4+\lambda_4+\lambda_4=-0.100 04 \pm j 23.894 71$	3.802 96	0.418 65
245,252	$\lambda_4+\lambda_4+\lambda_5=-0.100 04 \pm j 7.964 90$	1.267 65	1.255 87
253,254	$\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=-5.327 70 \pm j 6.770 88$	1.077 62	61.837 6
255,256	$\lambda_4+\lambda_5+\lambda_8=-5.246 80 \pm j 4.787 78$	0.762 00	73.868 0
257	$\lambda_4+\lambda_5+\lambda_{10}=-0.174 870$	0	100
268,291	$\lambda_4+\lambda_7+\lambda_{10}=-5.402 53 \pm j 1.194 03$	0.190 04	97.643 7
277,305	$\lambda_4+\lambda_{10}+\lambda_{10}=-0.249 70 \pm j 7.964 90$	1.267 65	3.133 51

通过特征根分析可知, 低频弱阻尼模式 $\lambda_{4(5)}$ 是系统的一个重要振荡模态, 图 1 给出了对应于模式 4 的发电机转速角 1 阶参与因子。图中, 利用线性方法获取式(14)的 $P_{ij}$ , 利用降维 Carleman 线性化获取式(15)的 $\tilde{p}1_{ij}^1$ 。很明显, 该模式与 2 号发电机关联程度最大, 而且这种低频弱阻尼振荡与 2、3 阶非线性部分有关。

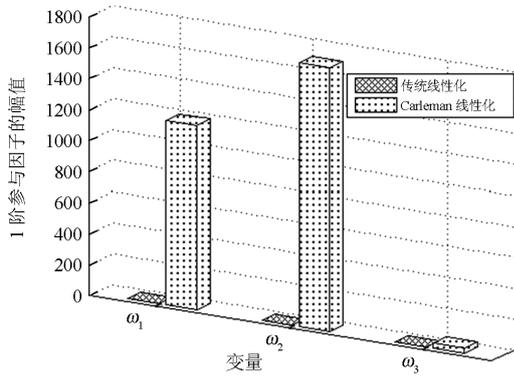


图 1 基于模式 4 的 1 阶参与因子  $P_{ij}$  与  $\tilde{p}1_{ij}^1$  ( $N=3$ )

Fig. 1 Participation factors  $P_{ij}$  and  $\tilde{p}1_{ij}^1$  ( $N=3$ ) of mode 4

同时, 图 2 绘出了发电机转速角 $\omega_2$ 的时域轨迹, 其中数值积分为真实轨迹, 其他两条轨迹分别为线性理论和降维 Carleman 线性化方法所求得。通过对比不难看出 Carleman 解析解的有效性。图 3 给出了发电机转速角 $\omega_2$ 所有参与因子中最大的几个, 表明了除存在与线性理论分析相同的起主导作用的 1 阶模式 4(5)外, 还存在由它复合而成的模式 245( $\lambda_4+\lambda_4+\lambda_5$ )不容忽视, 它与 3 阶非线性相关。

#### 4.2 高阶变量的非线性振荡模态分析

Carleman 因采用嵌入技术, 使得对高阶次状态变量及其非线性模态的观察变为可能, 图 4 给出了对应于 2 阶复合模式 43 的非线性相关因子 $\tilde{p}2_{sk}^2$ , 其显示 2 号发电机的 2 阶非线性很强。同时图 5 按式

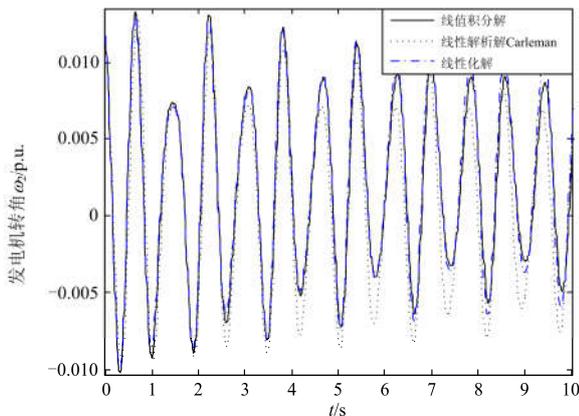


图 2 时域响应曲线  $\omega_2$

Fig. 2 Time response of  $\omega_2$

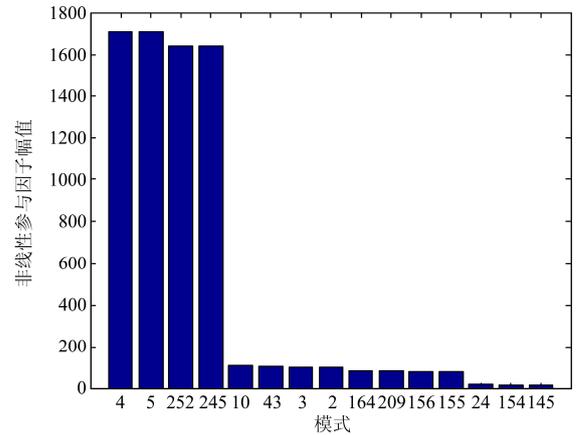


图 3  $\omega_2$  的非线性参与因子  $\tilde{p}1_{ij}^1, \tilde{p}2_{ik}^1, \tilde{p}3_{il}^1$

Fig. 3 Nonlinear participation factors  $\tilde{p}1_{ij}^1, \tilde{p}2_{ik}^1, \tilde{p}3_{il}^1$  of  $\omega_2$

(12)给出的 2 阶变量 $x_s^2 = \omega_2\omega_2$ 曲线印证了其 2 阶非线性的强烈程度, 其最大幅值的振荡约为 0.5 Hz 左右; 图 6 依据式(16)给出其非线性参与因子 $\tilde{p}2_{sk}^2, \tilde{p}3_{sl}^2$ , 显示 2 阶变量 $x_s^2 = \omega_2\omega_2$ 中起主导作用的复合模式有 245( $\lambda_4+\lambda_4+\lambda_5$ )、255( $\lambda_4+\lambda_5+\lambda_5$ )、48( $\lambda_4+\lambda_{10}$ )、55( $\lambda_5+\lambda_{10}$ )、257( $\lambda_4+\lambda_5+\lambda_{10}$ )。不难发现, 这些 2、3 阶模式都是由 1 阶线性模式 4(5)复合而成。

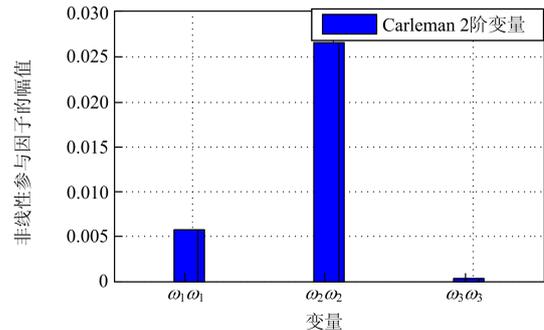


图 4 基于模式 43 的非线性参与因子  $\tilde{p}2_{sk}^2$

Fig. 4 Nonlinear participation factors  $\tilde{p}2_{sk}^2$  of mode 43

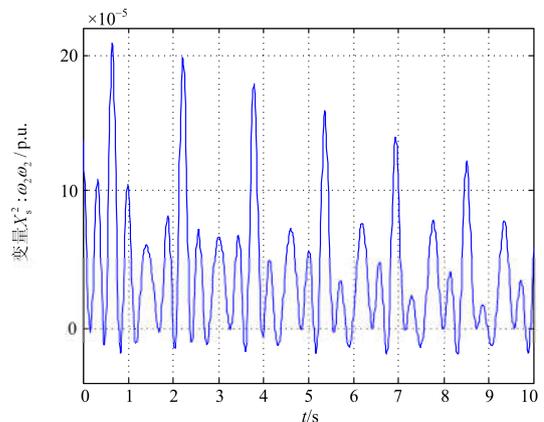


图 5 时域响应曲线  $x_s^2 = \omega_2\omega_2$

Fig. 5 Time response of  $x_s^2 = \omega_2\omega_2$

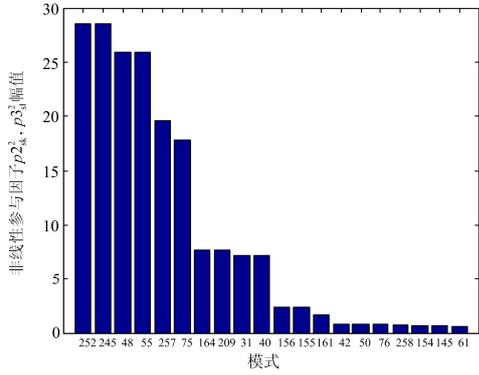


图 6  $x_s^2 = \omega_2 \omega_2$  的非线性参与因子  $\tilde{p}2_{sk}^2, \tilde{p}3_{sl}^2$

Fig. 6 Nonlinear participation factors

$$\tilde{p}2_{sk}^2 \text{ and } \tilde{p}3_{sl}^2 \text{ of } x_s^2 = \omega_2 \omega_2$$

图 7 给出了对应于 3 阶复合模式 245 的非线性相关因子  $\tilde{p}3_{sl}^3$ ，其显示 2 号发电机的 3 阶非线性仍是最强的。图 8 按式(13)给出的 3 阶变量  $x_l^3 = \omega_2 \omega_2 \omega_2$  曲线印证了其 3 阶非线性的强烈程度，其中也存在 0.5 Hz 左右幅值最大的振荡；图 9 依据式(17)给出的非线性参与因子表明 3 阶变量  $x_l^3$  中起主导作用的复合模式有 257( $\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_{10}$ )、245( $\lambda_4 + \lambda_4 + \lambda_5$ )、250( $\lambda_4 + \lambda_4 + \lambda_{10}$ )、164( $\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5$ )、277( $\lambda_4 + \lambda_{10} + \lambda_{10}$ )。不难发现，这些高阶模式也同样与 1 阶线性模式 4(5)有关。

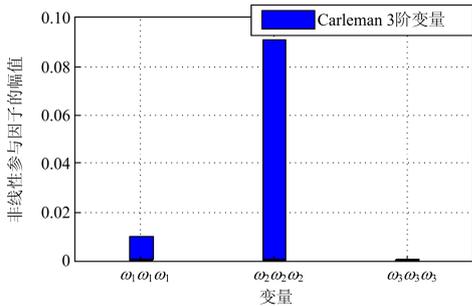


图 7 对应模式 245 的非线性参与因子  $\tilde{p}3_{wl}^3$

Fig. 7 Nonlinear participation factors  $\tilde{p}3_{wl}^3$  of mode 245

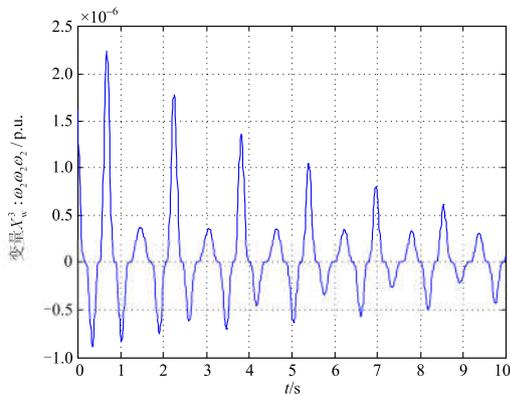


图 8 时域响应曲线  $x_l^3 = \omega_2 \omega_2 \omega_2$

Fig. 8 Time response of  $x_l^3 = \omega_2 \omega_2 \omega_2$

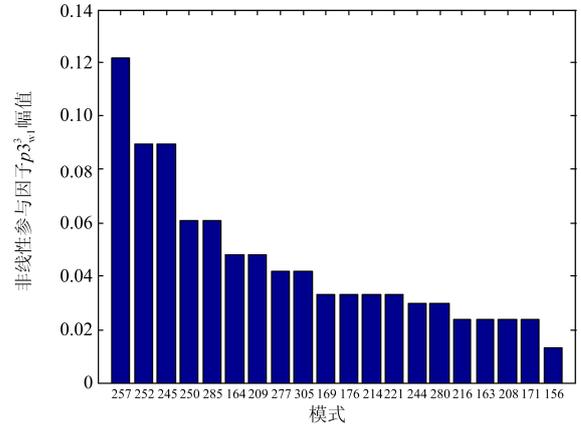


图 9  $x_l^3 = \omega_2 \omega_2 \omega_2$  的非线性参与因子  $\tilde{p}3_{wl}^3$

Fig. 9 Nonlinear participation factors  $\tilde{p}3_{wl}^3$  of  $x_l^3 = \omega_2 \omega_2 \omega_2$

为了验证高阶模态的存在，这里引入 Prony 分析<sup>[15]</sup>。假设原始曲线的离散化形式  $x(n)$  及其 Prony 拟合为  $\hat{x}(n)$ ，并引入信噪比 (Signal Noise Ratio, SNR) 和误差比两个测量指标确保拟合的精确：

$$SNR = -20 \log \left( \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n_t} |\hat{x}(n) - x(n)|^2}{\sum_{n=1}^{n_t} |x(n)|^2}} \right) \text{ (dB)}$$

$$error = \frac{\sum_{n=1}^{n_t} |\hat{x}(n) - x(n)|}{\sum_{n=1}^{n_t} |x(n)|} \times 100 \text{ (\%)}$$

式中， $n_t$  为采样点数。一般来说，满足  $SNR \geq 40$  dB 并且  $error < 10\%$  的 Prony 拟合是可以接受的。表 4 给出了系统状态变量  $\omega_2$  实际轨迹的 Prony 分析结果。大量的低频模态验证了实际轨迹中低频超低频成分的存在，也证明了 Carleman 嵌入技术分析高阶变量及其非线性模态的有效性。例如，Prony 分析得到的模式 3(4)，证明了 Carleman 高阶分析的 2、3 阶模态中确实存在 0.55 Hz 的低频振荡。同样表 4 中的模式 39(40) 证明了 1.27 Hz 振荡模态的存在，主要是涉及模式 4(5) 及其 2、3 阶复合模式。

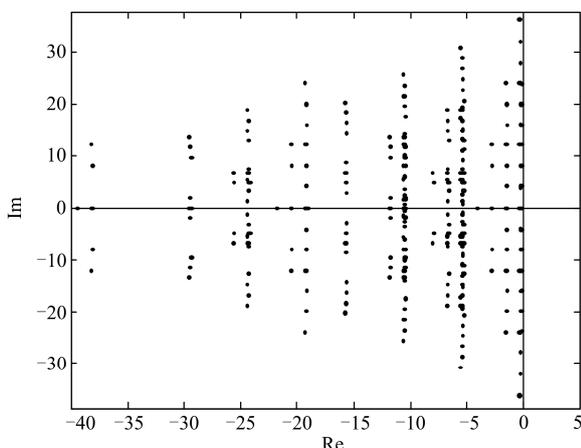
### 4.3 进一步分析

Carleman 线性化理论以嵌入技术为核心，将传统线性 1 阶特征空间拓展到高阶特征空间，如式(9)所示。如果适当调整前面算例中发电机参数和负荷功率，使系统存在负阻尼的 1 阶线性模式而失稳，系统调整前后的特征模式分布如图 10 所示。通过对比可以发现，由于负阻尼 1 阶模式的存在使得负阻尼的高阶复合模式增多，负阻尼程度就会变强，在右半平面就更加偏离虚轴，系统的不稳定情况自然要比线性分析时严重得多。

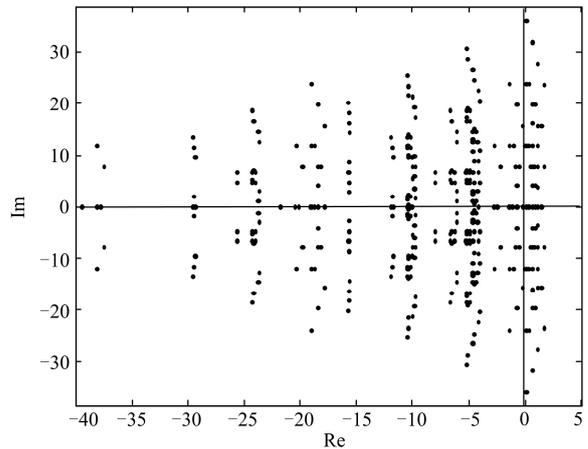
表 4  $\omega_2$  的 Prony 分析结果(SNR=114.34 dB, error=0.2541%)

Table 4 Prony results of  $\omega_2$  (SNR=114.34 dB, error=0.2541%)

序号	幅值	频率/Hz	衰减因子	阻尼比/%
1,2	0.000 000 50	1.301 541	-0.162 314	1.9844
3,4	0.000 000 56	0.551 010	-0.006 102	0.1762
5	0.000 000 01	0.000 000	-0.629 168	100
6	0.000 008 39	0.000 000	-1.994 287	100
7,8	0.000 000 56	0.893 122	-0.311 967	5.5507
9,10	0.000 001 61	1.664 609	-0.574 859	5.4880
11,12	0.000 001 49	2.025 568	-0.343 341	2.6968
13,14	0.000 002 03	2.359 376	-0.200 662	1.3535
15,16	0.000 001 45	2.611 001	-0.227 443	1.3863
17,18	0.000 017 60	3.258 839	-0.574 378	2.8040
19,20	0.000 003 76	3.415 605	-0.256 717	1.1961
21,22	0.000 016 54	3.912 319	-0.276 250	1.1237
23,24	0.000 005 66	3.800 176	-0.069 553	0.2913
25,26	0.000 051 73	3.716 064	-0.608 358	2.6046
27,28	0.000 051 28	3.170 452	-0.193 052	0.9691
29,30	0.000 759 67	2.984 969	-5.128 878	26.3780
31,32	0.000 125 50	2.505 604	-0.097 714	0.6207
33,34	0.000 033 52	2.449 569	-0.277 033	1.7997
35,36	0.001 790 97	1.913 633	-0.127 583	1.0610
37,38	0.000 102 50	1.856 931	-1.116 372	9.5248
39,40	0.004 593 97	1.260 021	-0.025 866	0.3267
41,42	0.001 573 42	1.232 018	-0.150 042	1.9379
43,44	0.000 025 96	0.626 456	-0.236 758	6.0041
45,46	0.000 789 83	0.047 023	-0.198 318	55.7319
47,48	0.004 606 25	0.935 691	-5.853 981	70.5590
49	0.000 085 06	0.000 000	-22.241 012	100



(a) 系统稳定时特征模式分布图



(b) 系统失稳时特征模式分布图

图 10 系统稳定与失稳时的特征模式分布的对比

Fig. 10 Comparison of stable and unstable mode characteristic distributions

## 5 结论

Carleman 嵌入技术及线性化理论巧妙地将原始状态变量场及其微分模型拓展成一个非线性高阶状态向量场下的无穷维线性化模型。从而, 等效后的模型可直接运用线性理论分析, 无需进行任何非线性变换或者其他复杂繁琐的求解过程。

本文研究用该方法对电力系统振荡问题进行非线性模态分析。对传统 Carleman 线性化模型的高阶状态向量场的冗余进行了降维, 从而大大减小了分析的计算量; 求解等效后的降维 Carleman 模型, 除了可以获得原非线性系统的线性基本特征模式、单状态变量的时域解析解及其非线性参与因子外, 还可以得到其中的高阶复合模式、高阶状态变量的时域振荡曲线和对应的非线性参与因子。

最后, 仿真结果表明了高阶状态变量及非线性参与因子可以揭示电力系统更多的非线性动态信息; 对比不同条件下高阶特征模式分布图, 也揭示了非线性模态对电力系统的重要性。研究成果丰富了电力系统的非线性模态分析手段, 为下一步计及高阶模态作用的非线性振荡分析和预防以及制定控制策略、设计控制器提供新的思路和方法。

## 参考文献

- [1] 刘隽, 李兴源, 邹全平, 等. 互联电网低频振荡的相关问题及研究[J]. 继电器, 2005, 33(16): 70-77, 84.  
LIU Jun, LI Xingyuan, ZOU Quanping, et al. Research and problem of low frequency oscillation in interconnected power networks[J]. Relay, 2005, 33(16): 70-77, 84.
- [2] 宋墩文, 温渤婴, 杨学涛, 等. 基于多信息源的大电网

- 低频振荡预警及防控决策系统[J]. 电力系统保护与控制, 2016, 44(21): 54-60.
- SONG Dunwen, WEN Boying, YANG Xuetao, et al. A multiple information sources based early warning and preventive control system for low-frequency oscillation in large-scale power system[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(21): 54-60.
- [3] SANCHEZ-GASCA J J, VITTAL V, GIBBARD M J, et al. Inclusion of higher order terms for small-signal (modal) analysis: committee report-task force on assessing the need to include higher order terms for small-signal (modal) analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20(4): 1886-1904.
- [4] 宋墩文, 杨学涛, 丁巧林, 等. 大规模互联电网低频振荡分析与控制方法综述[J]. 电网技术, 2011, 35(10): 22-28.
- SONG Dunwen, YANG Xuetao, DING Qiaolin, et al. A survey on analysis on low frequency oscillation in large-scale interconnected power grid and its control measures[J]. Power System Technology, 2011, 35(10): 22-28.
- [5] VITTAL V, BHATIA N, and FOUAD A A. Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1991, 6(4): 1515-1521.
- [6] NI Y, VITTAL V, and KLIEMANN W. Analysis of structural properties responsible for nonlinear modal behavior of a stressed power system using the normal form technique[C] // Proc IEEE, 39th Midwest symposium, Circuits and Systems, New York, USA, August, 1996, 3: 1029-1033.
- [7] LIN C M, VITTAL V, KLIEMANN W, et al. Investigation of modal interaction and its effects on control performance in stressed power systems using normal forms of vector fields[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1996, 11(2): 781-787.
- [8] LOMEI H, ASSILI M, SUTANTO D, et al. A new approach to reduce the non-linear characteristics of a stressed power system by using the normal form technique in the control design of the excitation system[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2017, 53(1): 492-500.
- [9] HUANG Qi, WANG Zhouqiang, ZHANG Changhua. Evaluation of the effect of modal interaction higher than 2nd order in small-signal analysis[C] // Proc 2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting, Calgary, Alberta, Canada, July 2009: 1-6.
- [10] RODRIGUEZ O, MEDINA A, MESSINA A R, et al. The modal series method and multi-dimensional Laplace transforms for the analysis of nonlinear effects in power systems dynamics[C] // Proc IEEE Power & Energy Society General Meeting, Calgary, Alberta, Canada, July 2009: 1-8.
- [11] KOWALSKI K, STEEB W H. Nonlinear dynamical systems and Carleman linearization[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pt. Ltd., 1991.
- [12] ARROYO J, BAROCIO E, BETANCOURT R, et al. A bilinear analysis technique for detection and quantification of nonlinear modal interaction in power systems[C] // IEEE Power Engineering Society, Proceeding of IEEE Power Engineering Society General Meeting, Montreal, Canada, 2006: 1-8.
- [13] 项丽, 鲍颜红, 耿天翔, 等. 基于广域信息的发电机电压控制抑制区间低频振荡方法[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(18): 18-22.
- XIANG Li, BAO Yanhong, GENG Tianxiang, et al. Damping inter-area low frequency oscillations method for generator voltage control based on wide-area information[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(18): 18-22.
- [14] 王锡凡. 现代电力系统分析[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [15] 李安娜, 吴熙, 蒋平, 等. 基于形态滤波和 Prony 算法的低频振荡模式辨识的研究[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(3): 137-142.
- LI Anna, WU Xi, JIANG Ping, et al. Research on identifying low frequency oscillation modes based on morphological filtering theory and Prony algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(3): 137-142.

收稿日期: 2016-12-09; 修回日期: 2017-02-22

作者简介:

王州强(1981—), 男, 通信作者, 博士研究生, 讲师, 研究方向为电力系统稳定与控制、电力电子技术电力系统中的应用研究等; E-mail: abc811104@163.com

黄琦(1976—), 男, 博士, 教授, 研究方向为电力系统广域测量与控制、智能电网测量与测试技术研究等; E-mail: hwong@uestc.edu.cn

张其群(1984—), 女, 本科, 助理工程师, 主要从事电力系统运行、维护与检测分析。

(编辑 姜新丽)