

DOI: 10.7667/PSPC160987

改进的 Prony 算法在多正弦信号频率估计中的应用研究

张晓威, 牛晓红, 翟广锐

(哈尔滨工程大学理学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对噪声背景下经典 Prony 算法对多正弦信号频率估计受限的问题, 提出一种抗噪性强的改进 Prony 算法。通过建立一种新的累积关系, 提出的算法可以在低信噪比情况下, 仅利用适当数量的新序列值线性重构稀疏和, 从而较为精确地估计出信号的频率。对提出的算法与经典 Prony 算法的性能作出仿真实验对比。实验结果表明, 在信号中嵌入噪声时, 经典 Prony 算法在估计信号频率时失去效用, 而新算法依旧可以有效估计信号频率。所以, 提出的算法抗噪能力较强, 性能相对稳定, 精度较高, 在多正弦信号频率估计中表现出更好的实用性。

关键词: Prony 算法; 频率估计; 线性重构; 稀疏和; 信噪比

Application research of the improved Prony algorithm in the multiple sinusoidal signal frequency estimation

ZHANG Xiaowei, NIU Xiaohong, ZHAI Guangrui

(College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: For the problem that estimating multiple sinusoidal signal frequency is insufficient by using the classical Prony algorithm under the noise background, this paper proposes an improved Prony algorithm with strong antinoise ability. Through establishing a new accumulation relationship, the proposed algorithm can only use appropriate new sequence values to reconstruct the sparse sums linearly under the condition of low SNR, so as to more accurately estimate signal frequency. It compares the proposed algorithm with the classical Prony algorithm by making the simulation experiment. And the experimental results show that as the signal embedded in the noise, the classical Prony algorithm loses effectiveness for the signal frequency estimation, and while the new algorithm can still effectively estimate signal frequency. So, the proposed algorithm has strong antinoise ability, relative stable performance and high precision advantages and shows better practicability in the multiple sinusoidal signal frequency estimation.

Key words: Prony algorithm; frequency estimation; linear reconstruction; sparse sums; SNR

0 引言

在噪声背景下, 有效估计多正弦信号的参数已经成为众多领域(如: 雷达、语音、光物理、光化学、地震等)的研究热点, 其在理论和应用上具有极其重要的价值^[1-5]。然而信号的产生往往伴随着不同强度的噪声, 这直接影响着信号参数估计的精度。因此, 在经典 Prony 算法的基础上, 为了提高抗噪能力和估计精度, 从各种角度对多正弦信号的参数估计做出研究^[6-9]。文献[10-12]提出了一种 ESPRIT 方法, 此方法需要计算信号的自相关函数, 具有一定的抗噪能力, 然而估计精度对自相关函数的估计依赖性较强。文献[13]给出了矩阵束方法, 该方法不需要求解多项式的各个系数, 克服了 ESPRIT 方法在估

计精度上依赖于自相关函数的缺点, 但此方法在求解矩阵束的特征值时, 需要求解矩阵的伪逆, 计算量大, 耗时较多。文献[14]针对传统矩阵束方法在信噪比较低的情况下辨识信号参数误差较大这一问题, 提出了基于 EEMD 和矩阵束算法的低频振荡主导模式识别, 提高了参数辨别精度, 拓宽了矩阵束方法的应用范围。文献[15]在 Prony 方法的基础上提出了近似 Prony 方法, 估计精度相比经典 Prony 算法有一定的提高, 但估计精度仍有不足。文献[16]对经典 Prony 方法进行推广, 提出了广义的 Prony 方法, 该方法不仅对多正弦信号参数估计具有很强的实用性, 在单项式稀疏和、正交多项式稀疏和以及有限维向量空间上向量的重构都表现出很强的实用性, 有一定的理论价值。文献[17]提出的改进

Prony 算法对信号进行分类之后, 对信号采样点求平均值, 具有一定的降噪能力。文献[18]将 Prony 算法和加窗插值相结合, 克服了两种方法单独作用的不足, 频率估计精度提高, 抗噪能力增强。文献[19]将 Prony 算法和形态滤波相结合, 滤波会起到降噪作用, 进而运用 Prony 算法对降噪之后的信号处理, 频率估计精度提高。文献[20]提出了 Prony 算法与小波分析相结合的方法, 通过恰当的小波函数对扰动信号分解之后, 改进的 Prony 算法在稳态扰动问题中提高了参数辨识精度。

基于以上问题, 针对噪声背景下, 经典 Prony 算法在多正弦信号参数估计中精度不足的问题, 根据本文所提出的关系式, 通过构造一组频率与源信号相同的新序列, 组成新的线性差分方程组, 线性重构正弦函数的稀疏和, 在信噪比较低时, 较为精确地估计出多正弦信号的频率。本文简要介绍了经典 Prony 算法频率估计原理, 详尽阐述了基于经典 Prony 算法的时域累积算法, 并做了数值仿真实验, 对两个算法性能进行比较得出相应的结果, 最后给出本文的结论, 说明了改进的 Prony 算法的应用价值以及有待继续研究的问题。

1 经典 Prony 算法

假设源信号的表达式为

$$s(t) = \sum_{k=1}^M B_k e^{j\alpha_k t}, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

$$\text{若 } \alpha_a = \omega_k, \alpha_b = -\omega_k, B_a = \frac{1}{2i} A_k e^{j\theta_k}, B_b = -\frac{1}{2i} A_k e^{-j\theta_k},$$

则信号模型为 $s(t) = \sum_{k=1}^M A_k \sin(\omega_k t + \theta_k)$; 同样地,

$$\text{若 } \alpha_a = \omega_k, \alpha_b = -\omega_k, B_a = \frac{1}{2} A_k e^{j\theta_k}, B_b = \frac{1}{2} A_k e^{-j\theta_k},$$

则信号模型为 $s(t) = \sum_{k=1}^M A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$; 其中,

$\{A_k, \theta_k, f_k\}$ 为第 k 个分量的振幅、相位和频率, 且均是未知参数, T 是观测时间, N 为等间距采样点数, Δt 为采样间隔, $f_s = N/T$ 为采样频率, 那么第 n 个采样点的定义如下:

$$F_n = s(\Delta t n) = \sum_{k=1}^M B_k e^{j\alpha_k \Delta t n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

以 $z_k = e^{j\alpha_k}$ ($k=1, 2, \dots, M$) 作为根构造 Prony 多项式:

$$P(z) = \prod_{k=1}^M (z - z_k) = \sum_{u=0}^M \beta_u z^u \quad (3)$$

根据式(2)构造线性差分方程如下:

$$\sum_{u=0}^M F_{u+q} \beta_u = 0, \quad (q=0, 1, \dots) \quad (4)$$

已知 $\beta_M = 1$, 那么, 由式(4)可得到

$$\sum_{u=0}^{M-1} F_{u+q} \beta_u = -F_{M+q}, \quad (q=0, 1, \dots) \quad (5)$$

根据式(5), 运用最小二乘法, 可求出多项式的系数 β_u ($u=0, 1, \dots, M-1$), 将求出的 β_u 代入式(3)可以求出 $z_k = e^{j\alpha_k}$ ($k=1, 2, \dots, M$), 相应地求出多正弦信号的频率估计值。

经典 Prony 算法步骤如下:

Step1 根据式(5)求出 Prony 多项式的系数 $\{\beta_u\}_{u=0}^M$;

Step2 第一步求出的 β_u ($u=0, 1, \dots, M-1$) 代入式(3), 求出多项式的根 $z_k = e^{j\alpha_k}$ ($k=1, 2, \dots, M$);

Step3 将 $z_k = e^{j\alpha_k}$ ($k=1, 2, \dots, M$) 代入式(1)求出参数 B_k 。

2 改进的 Prony 算法

假设源信号模型为

$$s(n) = \sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k), \quad n \in [0, N] \quad (6)$$

式中: $\{A_k, \theta_k, w_k\}$ 分别是第 k 个分量的振幅、相位和角频率, 且均是未知参数; N 为等间距采样点数。

定理 已知信号 $s(n) = \sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k)$, 其中 $n \in [0, N]$, N 为等间距采样点数, 对任意的 $a \in N^+$, $0 \leq p \leq \frac{N}{a}$ 和任一采样点 $s(n)$, 存在等式(7)成立。

$$\frac{1}{2^{ap}} \sum_{l=0}^{ap} C_{ap}^l s(n+2l-ap) = \sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k) \cos^{ap}(w_k) \quad (7)$$

运用数学归纳法, 简要证明上述等式成立。

证明:

当 $p=1$ 时, 等式的左端为

$$\frac{1}{2^a} \sum_{l=0}^a C_a^l s(n+2l-a) =$$

$$\frac{1}{2^a} [s(n-a) + C_a^1 s(n-(a-2)) + \dots + C_a^a s(n+a)] =$$

$$\frac{1}{2^a} [s(n-(a-1)) + C_{a-1}^1 s(n-(a-3)) + \dots + s(n+a-1)] \cdot$$

$$(2 \cos w_k)$$

当 a 为偶数时

$$\frac{1}{2^a} \sum_{l=0}^a C_a^l s(n+2l-a) =$$

$$\frac{1}{2^a} [s(n-2) + C_2^1 s(n) + C_2^2 s(n+2)] (2 \cos w_k)^{a-2} =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k) \cos^a w_k$$

当 a 为奇数时

$$\frac{1}{2^a} \sum_{l=0}^a C_a^l s(n+2l-a) =$$

$$\frac{1}{2^a} [s(n-1) + s(n+1)] (2 \cos w_k)^{a-1} =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k) \cos^a w_k$$

假定当 $p = m$ 时成立, 则有以下等式成立:

$$\frac{1}{2^{am}} \sum_{l=0}^{am} C_{am}^l s(n+2l-am) = \sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k) \cos^{am} (w_k)$$

那么当 $p = m+1$ 时, 根据组合数的性质

$$C_{a(m+1)}^l = C_{am}^l + C_a^1 C_{am}^{l-1} + \dots + C_{am}^{l-a}$$

等式的左端变形为

$$\frac{1}{2^{a(m+1)}} \sum_{l=0}^{a(m+1)} C_{a(m+1)}^l s(n+2l-am-a) =$$

$$\frac{1}{2^{a(m+1)}} \sum_{l=0}^{a(m+1)} (C_{am}^l + C_a^1 C_{am}^{l-1} + \dots + C_{am}^{l-a}) s(n+2l-am-a) =$$

$$\frac{1}{2^{a(m+1)}} \left\{ \sum_{l=a}^{am} (C_{am}^l + C_a^1 C_{am}^{l-1} + \dots + C_{am}^{l-a}) s(n+2l-am-a) + \right.$$

$$s(n-am-a) + C_{am+a}^1 s(n-am-a+2) + \dots +$$

$$C_{am+a}^{a-1} s(n-am+a-2) + C_{am+a}^{am+1} s(n+am-a+2) + \dots +$$

$$C_{am+a}^{am+a} s(n+am+a) \left. \right\} =$$

$$\frac{1}{2^a} \left\{ g(0) + \dots + g\left(\frac{a}{2}\right) + \dots + g(a) \right\}$$

(a 是偶数)

或

$$\frac{1}{2^{a(m+1)}} \sum_{l=0}^{a(m+1)} C_{a(m+1)}^l s(n+2l-am-a) =$$

$$\frac{1}{2^a} \left\{ g(0) + \dots + g\left(\frac{a-1}{2}\right) + g\left(\frac{a+1}{2}\right) + \dots + g(a) \right\}$$

(a 是奇数)

下面只讨论 a 是偶数的情况。

$$g(0) = \frac{1}{2^{am}} \sum_{l=0}^{am} C_{am}^l s(n-a+2l-am) =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k (n-a) + \theta_k) \cos^{am} (w_k)$$

$$g(1) = C_a^1 \frac{1}{2^{am}} \sum_{l=0}^{am} C_{am}^l s(n-(a-2)+2l-am) =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k (n-(a-2)) + \theta_k) \cos^{am} (w_k)$$

⋮

$$g(a) = C_a^a \frac{1}{2^{am}} \sum_{l=0}^{am} C_{am}^l s(n+a+2l-am) =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k (n+a) + \theta_k) \cos^{am} (w_k)$$

所以

$$\frac{1}{2^{a(m+1)}} \sum_{l=0}^{a(m+1)} C_{a(m+1)}^l s(n+2l-am-a) =$$

$$\frac{1}{2^a} \left\{ g(0) + \dots + g\left(\frac{a}{2}\right) + \dots + g(a) \right\} =$$

$$\frac{1}{2^a} [s(n-a) + as(n-(a-2)) + \dots + s(n+a)] \cos^{am} w_k =$$

$$\frac{1}{2^a} [s(n-2) + 2s(n) + s(n+2)] \cos^{am} w_k (2 \cos w_k)^{a-2} =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k) \cos^{a(m+1)} (w_k)$$

综上所述, 定理证明成立。

此定理给出了与源信号同频率下的一种新的时域累积关系, 对观测信号进行线性累加, 当 a 为偶数时, 在中心点 $s(n)$ 的左右两侧取点进行累加, 得到一组新的序列值; 当 a 为奇数时, 左右两侧对称分别取点进行累加, 得到一组新的序列值。由于新的序列值是由采样点累加得到, 因此理论上在处理过程中抗噪性会增强, 频率估计精度会提高, 利用得到的新序列值, 构造新的线性差分方程, 根据最小二乘法, 求解多项式的根, 由此, 令

$$F(n, p) = \frac{1}{2^{ap}} \sum_{l=0}^{ap} C_{ap}^l s(n+2l-ap) =$$

$$\sum_{k=1}^M A_k \cos(w_k n + \theta_k) \cos^{ap} w_k \quad (8)$$

假设频率 $\{f_k\}_{k=1}^M$, $f_k \neq f_j, k \neq j$, 因为 $w_k = 2\pi f_k \Delta t$, 那么有 $z_k = \cos^a w_k$ 互不相等, 将 z_k 作为根构造新的 Prony 多项式:

$$P(z) = \prod_{k=1}^M (z - z_k) = \beta_M z^M + \dots + \beta_1 z^1 + \beta_0 = \sum_{u=0}^M \beta_u z^u \quad (9)$$

这里 $\beta_M = 1$, 由式(9)可知

$$P(z_k) = \sum_{u=0}^M \beta_u z_k^u = \sum_{u=0}^M \beta_u \cos^{au} (w_k) = 0 \quad (10)$$

根据式(10), 如果可以求出 Prony 多项式的系

数 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{M-1}, \beta_M$, 就可以求出多项式的根 $\{z_k\}_{k=1}^M$, 那么根据 $z_k = \cos^a w_k$, 可以求得角频率 w_k , 进而求出信号频率值 $\{f_k\}_{k=1}^M$ 。

令

$$s_k(n) = A_k \cos(w_k n + \theta_k)$$

那么有

$$F(n, p) = \sum_{k=1}^M s_k(n) \cos^{ap}(w_k) \quad (11)$$

令 $p = u + q$, $u \geq 0$, $q \geq 0$, 根据式(10)与式(11)得到:

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^M \beta_u F(n, p) &= \sum_{u=0}^M \beta_u \sum_{k=1}^M s_k(n) \cos^{ap}(w_k) = \\ \sum_{k=1}^M s_k(n) \cos^{aq}(w_k) \sum_{u=0}^M \beta_u \cos^{au} w_k &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

以此所构造的线性差分方程, 表示了 Prony 多项式的系数与新序列 $F(n, p)$ 之间的一种等量关系, 其中, $q \leq p \leq M+q$, $a(M+q) \leq n \leq N-a(M+q)$, 该范围中的所有 n 都满足式(12), 由式(12)可知, q 取值的变化并不会影响等式的成立, 当 q 的取值减小时, $F(n, p)$ 中 n 的取值范围将会变大, 随之新序列值的数量会增加, 反之, 当 q 的取值增大时, $F(n, p)$ 中 n 的取值范围将会变小, 随之新序列值的数量会减少。因此, q 的取值会影响频率的估计精度。将式(12)转换为

$$\sum_{u=0}^{M-1} \beta_u F(n, p) = -F(n, p) \quad (13)$$

记作

$$\mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{F}_0 \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F(a(M+q), q) & F(a(M+q), q+1) & \dots & F(a(M+q), M-1+q) \\ F(a(M+q)+1, q) & F(a(M+q)+1, q+1) & \dots & F(a(M+q)+1, M-1+q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(N-a(M+q), q) & F(N-a(M+q), q+1) & \dots & F(N-a(M+q), M-1+q) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{M-1})^T$$

$$\mathbf{F}_0 = -(F(a(M+q), M+q), F(a(M+q)+1, M+q), \dots, F(N-a(M+q), M+q))^T$$

根据式(14), 通过最小二乘法可得

$$\mathbf{b} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{F}_0 \quad (15)$$

可以求出 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{M-1}, \beta_M$, 代入式(10), 求出 Prony 多项式的根 $\{z_k\}_{k=1}^M$, 根据 $z_k = \cos^a w_k$, 可以求出角频率 $w_k = \arccos(\sqrt[q]{z_k})$, 由 $w_k = 2\pi f_k \Delta t$, 可得到多正弦信号的频率估计值

$f_k = \arccos(\sqrt[q]{z_k}) / 2\pi \Delta t$ 。改进的 Prony 算法流程图如图 1 所示。

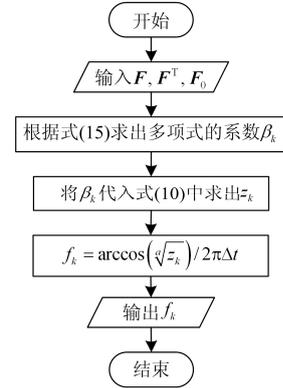


图 1 改进的 Prony 算法的流程图

Fig. 1 Flow chart of the improved Prony algorithm

从图 1 中可以得到, 本文提出的算法的关键在于得到一组新的序列值和构造新的 Prony 多项式, 利用多项式的系数和新序列值构造线性差分方程组, 进而通过最小二乘法求得相应系数。

3 数值仿真实验及性能研究

由于本文的算法模型对任意的 $a \geq 2$ 都成立, 当 $a = 2$ 、 $a = 3$ 时, 实现的仿真实验表明本文的算法性能均优于经典 Prony 算法, 因为 a 具有任意性, 本文给出了在 $a = 5$ 时的仿真实验。取观测信号为

$$s(n) = 3 \cos\left(38\pi \Delta t n + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(162\pi \Delta t n + \frac{\pi}{3}\right) \quad (16)$$

式中: $A_1 = 3$, $A_2 = 2$; $f_1 = 19$, $f_2 = 81$; $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$,

$\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ 。采样点数 $N = 1024$, 观测时间 $T = 1$ s, 采

样频率 $f_s = 200$ Hz, 进行 500 次仿真实验。其中, 频率的均方误差、信噪比分别满足下面的表达式:

$$MSE = 10 \lg \left(E \left(f - \hat{f} \right)^2 \right) \quad (17)$$

$$SNR = 10 \lg \left(\frac{A^2}{\sigma^2} \right), A^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad (18)$$

改进的 Prony 算法下频率 1、2 的均方误差随着信噪比取值变化的趋势如图 2、图 3 所示。

在信噪比取不同的值时, 两种算法下所估计出的频率 1、频率 2 的均方误差的取值如表 1 所示。

图 2、图 3 以及表 1, 对经典 Prony 算法和本文给出的算法作了比较, 从图像和数值中可以得出, 在信噪比较低时, 本文提出的算法, 频率均方误差接近克拉美罗下限, 并且可以有效地估计出信号频

率, 而经典 Prony 算法在噪声背景下, 估计信号频率受到限制, 失去效用。由此说明在信号中嵌入噪声时, 本文提出的算法性能优于经典 prony 算法。

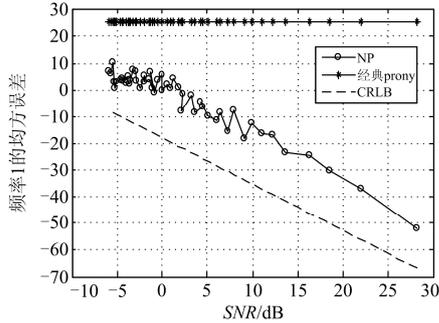


图 2 频率 1 的均方误差随信噪比变化的趋势
Fig. 2 MSE trend of frequency 1 as the SNR change

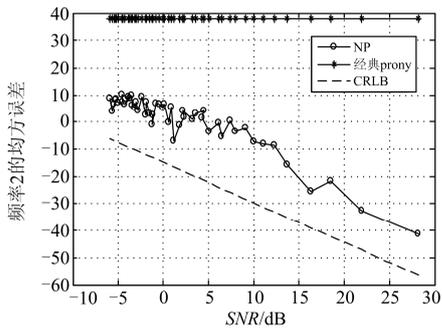


图 3 频率 2 的均方误差随信噪比变化的趋势
Fig. 3 MSE trend of frequency 2 as the SNR change

表 1 经典算法与改进算法频率均方误差随信噪比变化数值比较

Table 1 MSE numerical comparison of frequency as the SNR change between classical algorithm and improved algorithm

SNR/dB	经典 f_1 /改进 f_1 (MSE)	经典 f_2 /改进 f_2 (MSE)
-5	25.58/3.22	38.17/7.09
0	25.58/-0.04	38.17/5.11
5	25.58/-9.69	38.17/-3.57
10	25.58/-12.42	38.17/-7.33
15	25.58/-24.09	38.17/-20.88
20	25.58/-33.16	38.17/-26.04

根据上面观测信号的两个频率, 进行 500 次仿真实验, 在 q 的取值变化时, 观察频率 1, 频率 2 的均方误差的变化情况, 如图 4 所示。

从图 4 中可以看出, 本文提出的算法在 $q \in [0, 6]$ 时, 精度较高, 抗噪性强, 当 q 的取值超过 6, 由于 ap 的值较大, 导致累积项数会增大, 不易于计算机实时处理, 估计精度会受到影响, 本文提出的算法就会失去实际意义, 所以改进的算法在 q 的取值小于 6 时, 可以有效估计信号频率。

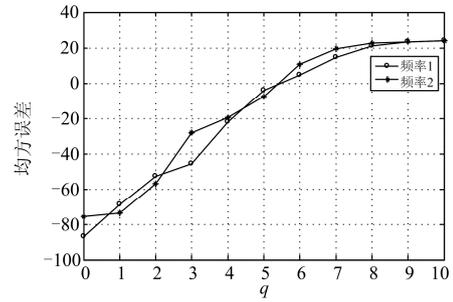


图 4 频率的均方误差随 q 变化的趋势
Fig. 4 MSE trend of frequency as q change

4 结论

本文提出的算法在低信噪比情况下参数估计性能优于经典 Prony 算法, 并且计算过程简单, 易于对检测信号进行实时处理, 且具有一定的抗噪能力, 克服了噪声背景下经典 Prony 算法对多正弦信号参数估计的不足, 在理论和实际应用中具有一定的价值。但是, 本文给出的算法, 没有形成相应的理论来求出最优的 a , 而且参数估计效果的好坏与 q 的取值有直接关系, 如何确定最优 a, q 的值, 从而使估计性能最好, 也是有待研究的问题。

参考文献

- [1] BAYRAM D, SEKER S. Wavelet based neuro-detector for low frequencies of vibration signals in electric motors[J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(5): 2683-2691.
- [2] CHEN T C, LIN M L, WANG K L. Landslide seismic signal recognition and mobility for an earthquake-induced rockslide in Tsanling Taiwan[J]. Engineering Geology, 2014, 171(3): 31-44.
- [3] HOC W A, SENSOR, NETWORKS M. Wavelet-based spectral shaping of UWB radio signal for multi-system coexistence[J]. Computer & Electrical Engineering, 2010, 36(2): 261-268.
- [4] HERMAN K, GUDRA T. New approach in bats' sonar signals parametrization and modeling[J]. Physics Procedia, 2010, 3(1): 217-224.
- [5] SHIRAZI J, GHAEMMAGHAMI S, RAZAZI F. Improvements in audio classification based on sinusoidal modeling[C] // IEEE International Conference on Multimedia & Expo. 2008: 1485-1488.
- [6] POTTS D, TASCHE M. Parameter estimation for nonincreasing exponential sums by Prony-like methods[J]. Linear Algebra & its Applications, 2013, 439(4): 1024-1039.

- [7] 石敏, 吴正国, 尹为民. 基于多信号分类法和普罗尼法的间谐波参数估计[J]. 电网技术, 2005, 29(15): 81-84.
SHI Min, WU Zhengguo, YIN Weimin. Inter-harmonic parameter estimation based on multi-signal classification and prony method[J]. Power System Technology, 2005, 29(15): 81-84.
- [8] PETER T, POTTS D, TASCHE M. Nonlinear approximation by sums of exponentials and translates, Siam Journal on Scientific Computing, 2011, 33(4): 1920-1947.
- [9] RIFE D, BOORSTYN R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [10] 张贤达. 现代信号处理[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2002: 119-125.
- [11] ALFIERI L, CARPINELLI G, BRACALE A. New ESPRIT-based method for an efficient assessment of waveform distortions in power systems[J]. Electric Power Systems Research, 2015, 122: 130-139.
- [12] 田伟, 王韵然, 曲晶. 基于互高阶谱的 ESPRIT 法的间/次谐波参数估计[J]. 东北电力大学学报, 2007, 27(2): 68-72.
TIAN Wei, WANG Yunran, QU Jing. Inter-harmonics and sub-harmonics parameter evaluation on cross-high-spectrum based on ESPRIT method[J]. Journal of Northeast Dianli University, 2007, 27(2): 68-72.
- [13] SARKAR T K, PEREIRA O. Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials[J]. IEEE Antennas & Propagation Magazine, 1995, 37(1): 48-55.
- [14] 雷强, 刘光晔, 朱永强, 等. 基于 EEMD 和矩阵束算法的低频振荡主导模式识别[J]. 电力系统保护与控制, 2016, 44(12): 56-62.
LEI Qiang, LIU Guangye, ZHU Yongqiang, et al. Identification of the dominant mode based on EEMD and matrix pencil algorithm for low frequency oscillations[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(12): 56-62.
- [15] POTTS D, TASCHE M. Nonlinear approximation by sums of nonincreasing exponentials[J]. Application Analysis, 2011, 90(3): 609-626.
- [16] PETER T, PLONKA G. A generalized Prony method for reconstruction of sparse sums of eigenfunctions of linear operators[J]. Inverse Problem, 2013, 29(2): 293-308.
- [17] 王辉, 苏小林. Prony 算法的若干改进及其在低频振荡监测中的应用[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(12): 140-145.
WANG Hui, SU Xiaolin. Several improvements of Prony algorithm and its application in monitoring low-frequency oscillation in power system[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(12): 140-145.
- [18] 熊杰锋. 基于加窗插值和 Prony 的电力系统间谐波算法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(7): 8-13, 19.
XIONG Jiefeng. Power system interharmonic analysis based on windowed interpolation and Prony algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(7): 8-13, 19.
- [19] 李安娜, 吴熙, 蒋平, 等. 基于形态滤波和 Prony 算法的低频振荡模式辨识的研究[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(3): 137-142.
LI Anna, WU Xi, JIANG Ping, et al. Research on identifying low frequency oscillation modes based on morphological filtering theory and Prony algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(3): 137-142.
- [20] 任子晖, 刘昊岳, 徐进霞. 基于小波变换和改进 Prony 方法的电能质量扰动分析[J]. 电力系统保护与控制, 2016, 44(9): 122-128.
REN Zihui, LIU Haoyue, XU Jinxia. Power quality disturbance analysis based on wavelet transform and improved Prony method[J]. Power System Protection and Control, 2016, 44(9): 122-128.

收稿日期: 2016-07-01; 修回日期: 2016-08-18

作者简介:

张晓威(1965—), 男, 硕士, 教授, 研究方向为不确定性系统与信号处理; E-mail: zhangxiaowei@hrbeu.edu.cn

牛晓红(1992—), 女, 通信作者, 硕士, 研究方向为不确定性系统与信号处理; E-mail: 1552137647@qq.com

翟广锐(1991—), 男, 硕士, 研究方向为不确定性系统与信号处理。E-mail: 673229804@qq.com

(编辑 魏小丽)