

DOI: 10.7667/PSPC160440

基于2级3阶单对角隐式Runge-Kutta法的 电磁暂态计算方法

杨萌, 汪芳宗

(三峡大学电气与新能源学院, 湖北 宜昌 443000)

摘要: 在电力系统电磁暂态计算中, 由于各种突变情况的发生, 将导致数值计算中存在数值振荡。为有效解决电力系统电磁暂态计算中的数值振荡问题, 将一种2级3阶单对角隐式Runge-Kutta法运用于电磁暂态数值计算中。由理论分析可知, 该数值积分方法具有非线性B-稳定性, 即具有能量耗散性或非线性阻尼特性。算例结果表明, 与现有的方法相比较, 使用该方法进行电磁暂态计算, 能够在不增加计算量的情况下, 有效避免因突变情况导致的数值振荡。

关键词: 电磁暂态计算; 数值积分方法; Runge-Kutta法; 数值振荡

2-stage 3-order diagonally implicit Runge-Kutta method for electromagnetic transient calculation

YANG Meng, WANG Fangzong

(College of Electrical Engineering & New Energy, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: In power system electromagnetic transient calculation, because of various kinds of sudden changes, there will be numerical oscillation in numerical calculation. In order to avoid the numerical oscillation in power system electromagnetic transient calculation effectively, the 2-stage 3-order diagonally implicit Runge-Kutta method is proposed for electromagnetic transient calculation. Through theoretic analysis, the proposed numerical integration method is of nonlinear B-stability, which also means that the method is of energy dissipation characteristic or nonlinear damping characteristic. From example results, this paper confirms that the proposed method can be free of numerical oscillation effectively though sudden change happens. Besides, compared with the present methods, using the proposed method to implement electromagnetic transient calculation will not add any extra computation load.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 51377098).

Key words: electromagnetic transient calculation; numerical integration method; Runge-Kutta method; numerical oscillation

0 引言

电力系统电磁暂态计算是研究电力系统各个元件中电场和磁场以及相应的电压和电流的变化过程, 其主要目的在于研究电力系统故障或操作过后可能出现的暂态过电压和过电流^[1-3]。在电磁暂态分析计算过程中, 考虑到元件的非线性、电磁耦合、长线路波过程和线路三相不对称、线路参数的频率特性等因素^[4], 需建立系统元件的微分方程或偏微分方程^[5-7], 并借助一定的数值计算方法对这些方程进行求解。

在电力系统电磁暂态计算中, 针对不同性质的元件参数, 使用的计算方法不尽相同, 而其中应用最为广泛的数值积分方法即为隐式梯形积分法。隐式梯形积分法具有2阶精度以及A-稳定性, 但该方法不是L-稳定的。在电磁暂态数值计算过程中, 当发生电感电流或电容电压突变以及开关元件动作等情况时, 使用隐式梯形法进行电磁暂态数值计算时会产生一系列“虚假的”、持续的数值振荡^[8-9]。

为了避免数值振荡现象, 研究者提出了许多解决方法^[8]。电磁暂态仿真程序(Electromagnetic Transient Program, EMTP)中曾通过附加阻尼元件的方法来避免数值振荡现象, 即在电感元件上并联一个电导或

在电容元件上串联一个电阻。经验证, 该方法在数学上即等价于隐式梯形法与隐式欧拉法相混合的数值计算方法^[10]。利用此类方法进行电磁暂态计算, 电导、电阻值的大小, 或阻尼因子的大小往往是通过“经验”来确定的, 因而使用起来很不方便, 且计算精度不高。后来加拿大学者 J. R. Marti 和我国学者林集明等通过在仿真过程中切换使用隐式梯形法和具有强阻尼特性的隐式欧拉法, 提出了临界阻尼调整法(Critical Damping Adjustment, CDA)^[11], 且此方法已被运用到 EMTP 版本 3.0(即 EMTP96)当中^[8]。在使用 CDA 方法进行电磁暂态仿真时, 依旧以隐式梯形法作为数值计算的主要方法, 仅在突变发生时刻利用隐式欧拉法来进行计算, 以此避免数值振荡情况的发生。CDA 方法可以有效避免数值振荡问题, 但前提条件是需要检测出突变现象及其发生的时刻。在实际仿真过程中, 突变的种类繁多, 对某些突变现象很难准确判断出突变发生的时刻。例如, 当传输线始端电压或电流发生突变时, 很难准确地判定其末端电压或电流发生突变的时刻, 或者是控制系统中电压源和电流源因为限幅环节的影响发生难以检测到的突变等^[12]。因此, 对一些很难检测到的突变现象, CDA 方法仍然无法避免数值振荡问题。

为进一步解决 CDA 方法在电磁暂态仿真中所存在的问题, 文献[12]中提出将 2 级 2 阶单对角隐式 Runge-Kutta(RK)方法(Singly Diagonally Implicit RK method, SDIRK)应用到电磁暂态计算中。与隐式欧拉法一样, 该方法也是 L-稳定的数值积分方法, 因而能够有效避免数值振荡现象。此外, 相较于 CDA 方法, 使用该方法进行电磁暂态计算无需对突变现象进行检测或判断, 这也是该方法的主要优点。然而, 无论有无突变现象, 在使用该方法进行计算时, 必须在每个积分步长内计算两个内点的变量值, 因此其计算量约为隐式梯形方法的两倍, 同时也比 CDA 方法的计算效率更低。

为了在不影响电磁暂态计算效率的情况下, 有效避免因突变情况导致的数值振荡现象, 本文将一种 2 级 3 阶单对角隐式的 Runge-Kutta 方法运用到电磁暂态计算当中。通过理论分析和算例对比, 讨论并研究了该算法在数值稳定性以及计算精度、计算效率等方面的性能。

1 2 级 3 阶单对角隐式 Runge-Kutta 法

1.1 2 级 3 阶单对角隐式 Runge-Kutta 法简介

一般地, 可将电力系统电磁暂态计算的基本数学模型表示为如式(1)所示的常微分方程初值问题。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: t 表示积分时间; $\mathbf{x}(t)$ 为状态变量所组成的向量; $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ 是时间 t 和状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 的函数; \mathbf{x}_0 是状态变量在初始时刻的取值。

对于式(1)中的数值解初值问题, 一类重要的求解方法即是所谓的 Runge-Kutta 方法簇^[13]。利用 s 级的 Runge-Kutta 方法求解微分方程组(1), 可写为如式(2)的通用形式。

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(t_n + c_j h, \tilde{\mathbf{x}}_j) \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{f}(t_n + c_j h, \tilde{\mathbf{x}}_j) \end{cases}, i \in (1, s) \quad (2)$$

式中: h 为积分步长; a_{ij} 和 b_i 为积分权系数, 它们满足 $\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i$, $\sum_{i=1}^s b_i = 1$; $c_i, i \in (1, s)$ 称为内节点, 且 $0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_s \leq 1$, $\tilde{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}(t_n + c_i h)$ 是状态变量在内节点 c_i 上的近似值, 称为内点。

为简便起见, 一般将 s 级的 Runge-Kutta 方法表示为如式(3)所示的 Butcher 表形式。

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{c} & \mathbf{A} & \\ \hline & \begin{array}{c} c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{array} \\ \hline & \mathbf{b}^T & \begin{array}{ccc} b_1 & \cdots & b_s \end{array} \end{array} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in R^{s \times s}$; $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_s)$; $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T$ 。

上述 Butcher 表中, 当 $a_{ij} = 0, j \geq i$ 时, 式(3)所代表的方法为显式 RK 方法, 计算简单、效率高, 但是, 所有的显式 RK 方法均不具备 A-稳定性, 因此显式 RK 方法的运用受到了限制。在隐式 RK 方法中, 当 $a_{ij} = 0, j > i, i \in (1, s-1)$ 且 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{ss} = \gamma \neq 0$ 时, 式(3)被称为 s 级单对角隐式 RK 方法, 利用此类方法进行计算时, 因可以避免 Butcher 变换所需要的额外计算量, 而使得计算效率相对更高。

文献[12]中所提及的就是一种 2 级的单对角隐式 RK 方法, 但该方法只具有 2 阶精度。下面给出一种具有 3 阶精度的 2 级单对角隐式 RK 方法, 其 Butcher 表为^[13]

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{c} & \mathbf{A} & \\ \hline & \begin{array}{cc} \beta & 0 \\ 1-\beta & 1-2\beta \end{array} & \begin{array}{cc} \beta & 0 \\ \beta & \beta \end{array}, \beta = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ \hline & \mathbf{b}^T & \begin{array}{cc} 1/2 & 1/2 \end{array} \end{array} \quad (4)$$

1.2 数值稳定性分析

众所周知, L-稳定性是线性稳定性的范畴。从理论上讲, 对线性微分动力系统, L-稳定的数值方法可以避免数值振荡问题, 这是隐式欧拉法以及 2 级 2 阶单对角隐式 Runge-Kutta 方法能够避免数值振荡问题的主要数学机理。但对非线性微分动力系统, L-稳定的数值方法并不一定能完全避免数值振荡问题。为此, 研究人员已建立了非线性稳定性分析的概念及相关理论体系。关于非线性稳定性, 一个重要的结论就是所谓的 B-稳定性以及非线性代数稳定性。研究人员已证明: 对一个非退化的 Runge-Kutta 方法, 非线性代数稳定性等价于 B-稳定性^[14]。利用非线性代数稳定性的定义, 可以验证并得出以下结论。

2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法的 M 矩阵的表达式为^[13]

$$M \equiv [M_{ij}] = BA + A^T B - bb^T = \begin{bmatrix} \beta - \frac{1}{4} & -\beta + \frac{1}{4} \\ -\beta + \frac{1}{4} & \beta - \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(5)中, $B = \text{diag}(b)$ 。显然, M 矩阵的特征值为:

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ 。因此, 式(4)对应方法的 M 矩阵是非负定的。由于有 $b_1 = b_2 = 1/2 > 0$, 因此, 上述 2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法, 即式(4)是非线性代数稳定的, 也是 B-稳定的^[13]。

众所周知, 对常微分方程初值问题, B-稳定的数值方法满足单边 Lipschitz 条件, 即

$$\langle f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2), x_1 - x_2 \rangle \leq 0 \quad (6)$$

式(6)中, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ 表示内积。因此, B-稳定的数值方法具有能量耗散性。从物理概念上讲, 这里的能量耗散性也就是非线性阻尼特性。因此, 在系统发生突变时, B-稳定的数值方法不会产生数值振荡现象。换言之, 在电磁暂态数值计算中, 若系统发生突变现象, 2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法可以避免数值振荡问题。

2 数值算例

算例 1: 图 1(a)是一个基本的线性 R-L 串联电路, 图 1(b)是施加的电流源; 其中, 开关 K 在施加的电流 $i(t)$ 降至零时($t = 0.01$ s)突然打开。

图 2 是利用隐式梯形法(计算步长 $h = 0.05$ ms)对该测试电路进行数值计算的结果(产生严重的数值振荡); 图 3 是利用 2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法(计算步长 $h = 0.1$ ms)进行数值计算的结果。显然,

由图 3 可以看出: 当突变发生时, 2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法的计算结果没有产生数值振荡。

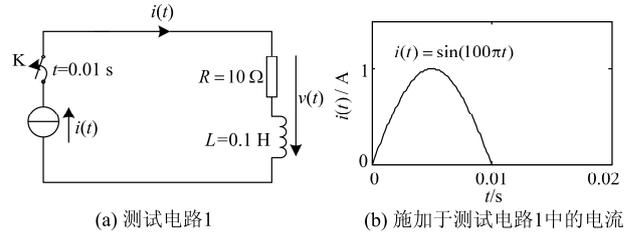


图 1 测试电路 1 及电流源信号波形

Fig. 1 Test circuit 1 and the current source waveform

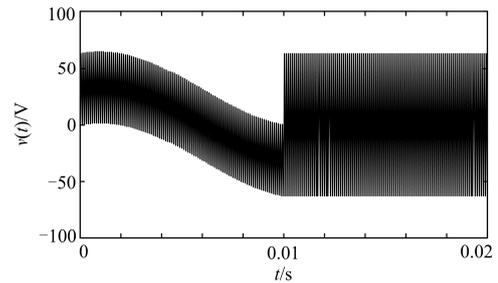


图 2 隐式梯形法的计算结果

Fig. 2 Result calculated by implicit trapezoidal method

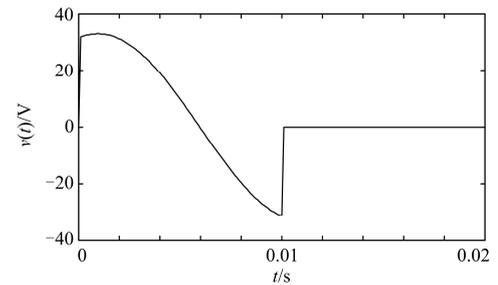


图 3 2 级 3 阶 SDIRK 方法的计算结果

Fig. 3 Result calculated by 2-stage 3-order SDIRK method

算例 2: 图 4 是一个末端接有电容器的分布参数电路, 其传输线始端的阶跃突变信号从传输线始端传输到末端; 利用分布参数线路的 Bergeron 等效模型^[15]计算线路末端电压以及电容电流。

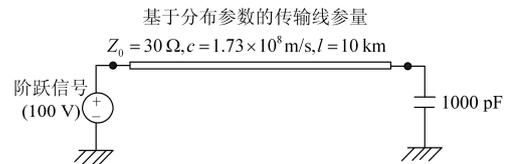


图 4 测试电路 2

Fig. 4 Test circuit 2

图 5 是利用 CDA 方法(计算步长 $h = 1$ μ s)对该测试电路进行数值计算的结果(产生数值振荡); 图 6

是利用 2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法(计算步长 $h = 2 \mu\text{s}$)进行数值计算的结果。显然, 从图 6 可以看出: 当突变信号从传输线始端传至传输线末端时, 2 级 3 阶单对角隐式 RK 方法的计算结果没有产生数值振荡。

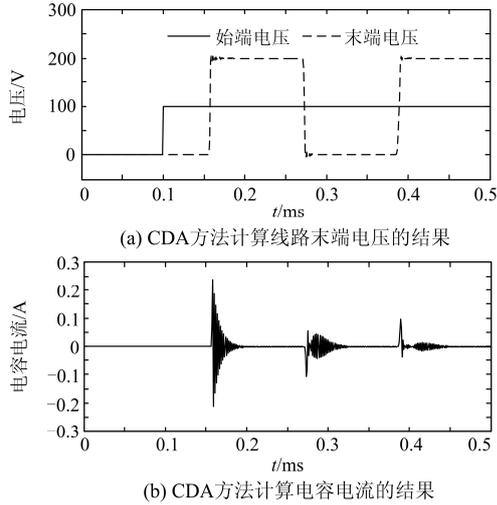


图 5 CDA 方法的计算结果

Fig. 5 Results calculated by CDA method

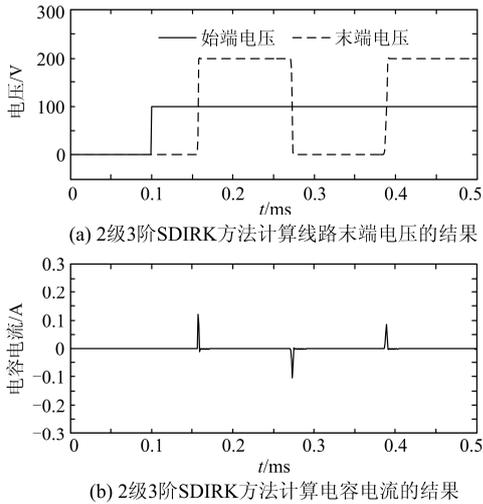


图 6 2 级 3 阶 SDIRK 方法的计算结果

Fig. 6 Results calculated by 2-stage 3-order SDIRK method

算例 3: 图 7(a)是一个基本的线性 R-C 串联电路, 图 7(b)是施加的电压源, 该电路中电容两端电压的精确解为

$$v_C(t) = \frac{1}{\Delta t} \{ [t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] - [t - \Delta t - \tau(1 - e^{-(t-\Delta t)/\tau})] u(t - \Delta t) \} \quad (7)$$

式中: $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$; $\tau = RC = 0.1 \text{ ms}$; $u(t)$ 为一单位阶跃信号。

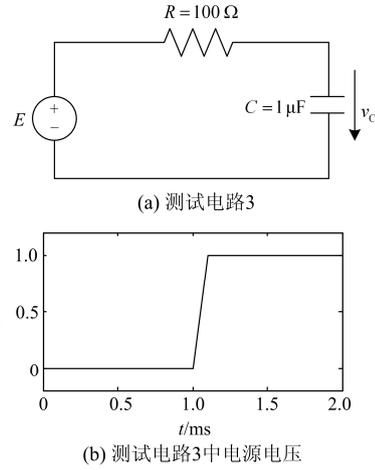


图 7 测试电路 3 及电压源信号波形

Fig. 7 Test circuit 3 and the voltage source waveform

图 8 为使用 2 级 3 阶 SDIRK 方法(计算步长为 $h = 0.01 \text{ ms}$)与使用 2 级 2 阶 SDIRK 方法(计算步长为 $h = 0.005 \text{ ms}$)计算电容端电压的误差结果对比曲线。可以看出, 当 2 级 3 阶 SDIRK 方法采用二倍于 2 级 2 阶 SDIRK 方法的步长进行计算时, 其计算误差仍小于后者。因而在保持同一计算精度的前提下, 2 级 3 阶 SDIRK 方法可采用更大的积分步长进行计算, 使得其整体的计算量低于 2 级 2 阶 SDIRK 方法的计算量, 从而计算效率更高。

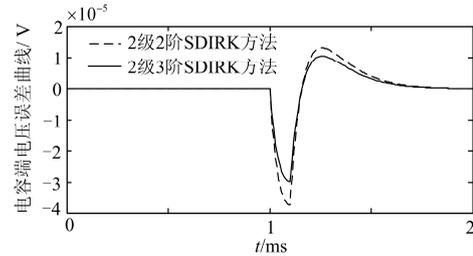


图 8 2 级 3 阶 SDIRK 方法与 2 级 2 阶 SDIRK 方法计算结果的误差对比曲线

Fig. 8 Comparison of the error curve by 2-stage 3-order SDIRK method and 2-stage 2-order SDIRK method

算例 4: 图 9 是一个单相输电线路空载合闸的计算实例^[16], 系统参数如图中所示, $t = 0.005 \text{ s}$ 时, 开关突然闭合, 计算线路末端电压。

图 10 为使用 2 级 3 阶 SDIRK 方法(计算步长为 $h = 10 \mu\text{s}$)计算线路末端电压的结果, 可以看出其结果与文献[16]中一致, 且没有产生数值振荡现象。图 11 为使用 2 级 2 阶 SDIRK 方法(计算步长 $h = 5 \mu\text{s}$)计算线路末端电压的结果, 可以看出其计算结果在某些拐点处产生了轻微数值振荡现象。图 12 为使用 CDA 方法(计算步长 $h = 5 \mu\text{s}$)计算线路末端电压

的结果，其计算结果也产生了数值振荡现象，且比使用2级2阶SDIRK方法计算所产生的数值振荡现象更严重。

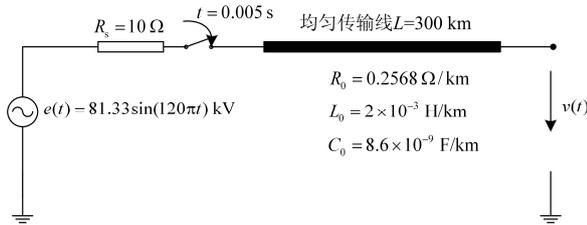


图9 单相输电线路空载合闸计算实例

Fig. 9 Test of a single phase transmission line without load being switched-in suddenly

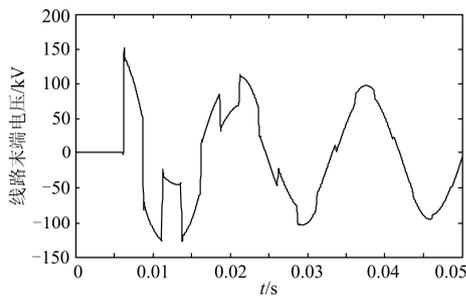


图10 2级3阶SDIRK方法计算线路末端电压的结果

Fig. 10 Terminal voltage of transmission line calculated by 2-stage 3-order SDIRK method

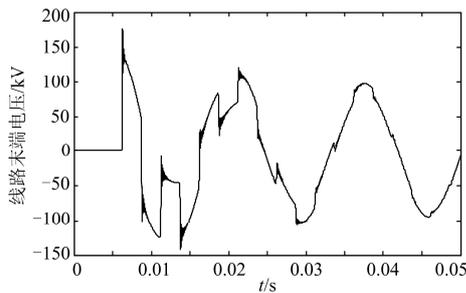


图11 2级2阶SDIRK方法计算线路末端电压的结果

Fig. 11 Terminal voltage of transmission line calculated by 2-stage 2-order SDIRK method

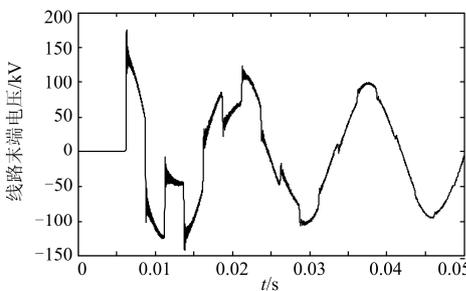


图12 CDA方法计算线路末端电压的结果

Fig. 12 Terminal voltage of transmission line calculated by CDA method

3 结论

本文将一种2级3阶单对角隐式Runge-Kutta方法运用到电磁暂态计算中。该方法具有L-稳定性以及非线性B-稳定性，因此可以有效避免计算中的数值振荡现象。该方法是2级、A-稳定的数值计算方法，在每个积分步长内需进行2次数值积分计算；但同时，该方法具有3阶的计算精度，故相对于已有的各类方法，其能在仿真中使用更大的积分步长。总体而言，使用本文方法进行电磁暂态数值仿真，能够在不增加计算量的前提下，有效避免数值振荡。

参考文献

[1] 肖翔, 张小青, 李聪. 风电机组雷电过电压的仿真分析[J]. 电工技术学报, 2015, 30(24): 237-244.
XIAO Xiang, ZHANG Xiaoqing, LI Cong. Simulation analysis on overvoltage in wind turbines by lightning stroke[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(24): 237-244.

[2] 傅伟, 赵莉华, 梁勇, 等. 多台变压器空载合闸励磁涌流及其抑制方案的研究[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(1): 28-33.
FU Wei, ZHAO Lihua, LIANG Yong, et al. Study on no-load closing inrush current of transformer group and suppression measures[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(1): 28-33.

[3] 郑超, 王贺楠, 刘洪涛, 等. 基于用户自定义程序的VSC-HVDC机电磁混合仿真研究[J]. 电工技术学报, 2015, 30(16): 168-174.
ZHENG Chao, WANG Henan, LIU Hongtao, et al. Study of the electromechanical and electromagnetic hybrid simulation for VSC-HVDC based on PSASP/UIP[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(16): 168-174.

[4] 王成山, 李鹏, 王立伟. 电力系统电磁暂态仿真算法研究进展[J]. 电力系统自动化, 2009, 33(7): 97-103.
WANG Chengshan, LI Peng, WANG Liwei. Progress on algorithm of electromagnetic transient simulation for electric power system[J]. Automation of Electric Power Systems, 2009, 33(7): 97-103.

[5] 熊凌飞, 韩民晓, 姚蜀军. 锁相环对多端柔性直流稳定性作用分析及参数选择研究[J]. 电工技术学报, 2015, 30(16): 203-212.
XIONG Lingfei, HAN Minxiao, YAO Shujun. Influence of PLL on the stability analysis of VSC-MTDC and parameter selection[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(16): 203-212.

[6] 闫凯, 张保会, 瞿继平, 等. 光伏发电系统暂态建模与

- 等值[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(1): 1-8.
- YAN Kai, ZHANG Baohui, QU Jiping, et al. Photovoltaic power system transient modeling and equivalents[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(1): 1-8.
- [7] 于洋, 孙学锋, 高鹏, 等. 高压直流输电线路暂态保护分析与展望[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(2): 148-154.
- YU Yang, SUN Xuefeng, GAO Peng, et al. Analysis and prospect on transient protection for HVDC transmission lines[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(2): 148-154.
- [8] 商莹, 于玉铭, 邹振宇, 等. 非线性电路暂态仿真中消除数值振荡的改进方法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(7): 142-146.
- SHANG Ying, YU Yuming, ZOU Zhenyu, et al. An advanced method of non-linear circuit eliminating numerical oscillation in electromagnetic transient simulation[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(7): 142-146.
- [9] ALVARADO F L, LASSETER H R, SANCHEZ J J. Testing of trapezoidal integration with damping for the solution of power transient problems[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus & System, 1983, PAS-102(12): 3783-3790.
- [10] 刘益青, 陈超英. 用以消除数值振荡的阻尼梯形法误差分析与修正[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(7): 57-61.
- LIU Yiqing, CHEN Chaoying. Errors analysis and correction of damping trapezoidal integration for eliminating numerical oscillations[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(7): 57-61.
- [11] LIN Jingming, MARTI J R. Implementation of the CDA procedure in the EMTP[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1990, 5(2): 394-402.
- [12] NODA T, TAKENAKA K, INOUE T. Numerical integration by the 2-Stage diagonally implicit Runge-Kutta method for electromagnetic transient simulations[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2009, 24(1): 390-399.
- [13] 汪芳宗. 大规模电力系统暂态稳定性数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [14] 李寿佛. 刚性微分方程算法理论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1997.
- [15] 陈朝晖, 黄少锋, 陶惠良. 基于 Bergeron 模型的长线路微分方程算法研究[J]. 电力系统自动化, 2005, 29(9): 31-34, 81.
- CHEN Zhaohui, HUANG Shaofeng, TAO Huiliang. Research on the application of the Bergeron model to the differential equation algorithm for long transmission line[J]. Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(9): 31-34, 81.
- [16] 戴仁昶, KEVIN K W C, LAURENCE A, 等. DTS 中远距离输电线路的电磁暂态仿真[J]. 电网技术, 2002, 26(7): 7-10.
- DAI Renchang, KEVIN K W C, LAURENCE A, et al. Electromagnetic transient stability simulation of long distance transmission line in DTS[J]. Power System Technology, 2002, 26(7): 7-10.

收稿日期: 2016-03-29; 修回日期: 2016-05-26

作者简介:

杨 萌(1991-), 女, 通信作者, 硕士研究生, 研究方向为电力系统电磁暂态计算; E-mail: 510538296@qq.com

汪芳宗(1966-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为电力系统自动化及新能源微电网。

(编辑 魏小丽)