

DOI: 10.7667/PSPC160089

基于帕德逼近的暂态稳定性快速数值计算方法

汪芳宗, 聂赞

(三峡大学电气与新能源学院, 湖北 宜昌 443002)

摘要: 数值积分方法是电力系统暂态稳定性分析计算的基本方法。寻找一种快速、可靠的数值计算方法可以有效提高暂态稳定性计算的计算速度和计算精度。因此提出了一种基于帕德逼近的暂态稳定性数值计算方法, 分析了该方法的数值稳定性, 并采用IEEE145节点的暂态稳定性计算系统进行仿真计算。通过比较帕德逼近方法与泰勒展开方法的计算结果, 初步验证帕德逼近方法具有较高的计算精度。该方法比较适合电力系统暂态稳定性及相似问题的数值计算。

关键词: 暂态稳定性; 泰勒级数; 帕德逼近; 步长控制; 并行计算

Fast algorithm for transient stability numerical simulation using Padé approximation

WANG Fangzong, NIE Yun

(College of Electrical Engineering & New Energy, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: Numerical integration method is the basic method of power system transient stability analysis and calculation. Looking for a fast and reliable numerical method can effectively improve the calculation speed and accuracy of power system transient stability. This paper puts forward a numerical integration method of power system transient stability which is based on Padé approximation, analyzes the numerical stability of this method and uses transient IEEE145-node calculation system for simulation calculation. By comparing the results of Padé approximation method with the results of Taylor series expansion method, it proves that the numerical integration method based on Padé approximation has high accuracy. Therefore the new method could be more suitable to numerical analysis of transient stability and other like-wise problems.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 51377098).

Key words: transient stability; Taylor series; Padé approximation; step control; parallel computation

0 引言

电力系统暂态稳定性的数值计算方法, 根据显式数值积分方法和隐式数值积分方法进行分类, 大致可以分为隐式联立求解法(Simultaneous Implicit Method, SI)和显式分离求解法(Partitioned explicit Method, PE)两大类^[1]。隐式联立求解法主要采用隐式梯形积分法^[2], 其中的 Newton 联立求解过程具有较好的收敛性。但是, 严格的 Newton 联立求解过程需要多次形成雅克比矩阵并对其进行三角分解, 因此隐式联立求解方法的计算速度较慢, 编程也比较复杂。同时, 这种求解方法很难处理间断点问题。显式分离求解法一般采用 4 级 4 阶显式 RK 方法,

这种求解方法具有计算过程简单、计算精度较高的优点。迄今为止, 传统的显式积分方法均不是 A-稳定的^[3], 因而存在数值计算稳定性的问题。文献[4]、文献[5]中提出应用快速高阶 Taylor 级数法进行电力系统暂态稳定性计算, 该方法具有准确、快速、递推和编程简单的优点, 但该方法在解决工程实际问题中存在一定的缺点。

在保留上述方法的优点、避免其缺点这一思想基础上, 本文从实际应用的角度出发, 提出一种基于帕德逼近的暂态稳定性数值计算方法。并采用 IEEE50 机 145 节点测试系统进行仿真计算, 通过比较相同积分步长时, 分别采用帕德逼近方法与泰勒级数方法计算得出的误差曲线, 初步验证该方法在计算精度上具有一定的优势, 可推广应用于电力系统暂态^[6-8]稳定性及其他领域的数值计算。

2 基于帕德逼近的暂态稳定性计算方法

2.1 高阶导数的快速递推计算方法

文献[4]与文献[11]中提出了暂态稳定性计算的高阶导数递推方法, 该方法对微分方程和代数方程进行推导和分析的主要过程如下。

对于包含 n 个发电机节点的系统, 转子运动方程为

$$\begin{cases} M_i \frac{d\omega_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei}(\delta) - D_i \omega_i \\ \frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i \end{cases} \quad (23)$$

式中: 下标 i 表示第 i 台发电机; M_i 为惯性常数; δ_i 为转角; ω_i 为转速; P_{mi} 为机械功率, P_{ei} 为电磁功率; D_i 为阻尼系数^[11]。

可得出发电机转角和转速的时间导数表达式为

$$\delta_i^{(p+2)} = \omega_i^{(p+1)} = \frac{P_i^{(p)}}{M_i} \quad (24)$$

式中

$$P_i^{(p)} = P_{mi}^{(p)} - P_{ei}^{(p)}(\delta) - D_i \omega_i^{(p)} \quad (25)$$

其中, $P_i^{(p)}$ 为功率导数。若发电机功角的导数已知, 则根据 Taylor 级数有:

$$\begin{cases} \delta_i(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{p+2} \delta_i^{(j)}(t_k) \frac{(t_{k+1} - t_k)^j}{j!} \\ \omega_i(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} \omega_i^{(j)}(t_k) \frac{(t_{k+1} - t_k)^j}{j!} \\ P_i(t_{k+1}) = \sum_{j=0}^p P_i^{(j)}(t_k) \frac{(t_{k+1} - t_k)^j}{j!} \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)展开, 可得发电机转角、转速和功率的时域解。

系统的网络代数方程可定义为

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}(\delta) \quad (27)$$

式中,

$$\mathbf{I}(\delta) = \mathbf{I}^N(\delta) - \mathbf{D}(\delta)\mathbf{V} \quad (28)$$

其中: \mathbf{V} 为二阶向量 $\mathbf{V}_i = (\mathbf{V}_{xi}, \mathbf{V}_{yi})^T$ 组成的 n 阶发电机节点电压向量; \mathbf{I} 为二阶向量 $\mathbf{I}_i = (\mathbf{I}_{xi}, \mathbf{I}_{yi})^T$ 组成的 n 阶发电机定子电流向量; \mathbf{I}^N 为二阶向量 $\mathbf{I}^N = (\mathbf{I}_{xi}^N, \mathbf{I}_{yi}^N)^T$ 组成的 n 阶发电机定子 Norton 电流向量; \mathbf{Y} 为二阶子矩阵组成的 $n \times n$ 阶节点导纳矩阵, 每个二阶子矩阵为

$$\mathbf{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & -B_{ij} \\ B_{ij} & G_{ij} \end{bmatrix}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

$\mathbf{D}(\delta)$ 为由二阶子矩阵组成的与发电机转角相关的 $n \times n$ 阶对角块矩阵。

$$\mathbf{D}(\delta) = \text{diag}[\mathbf{D}_1(\delta_1), \mathbf{D}_2(\delta_2), \dots, \mathbf{D}_n(\delta_n)] \quad (30)$$

式中,

$$\mathbf{D}_i(\delta_i) = \begin{bmatrix} G_{xi}(\delta_i) & -B_{xi}(\delta_i) \\ B_{yi}(\delta_i) & G_{yi}(\delta_i) \end{bmatrix} \quad (31)$$

由式(27)和式(28), 可得到网络方程:

$$(\mathbf{Y} + \mathbf{D}(\delta))\mathbf{V} = \mathbf{I}^N(\delta) \quad (32)$$

式(32)对不同发电机模型具有普适性。

式(27)根据二项式导数递推规律, 有:

$$(\mathbf{Y} + \mathbf{D}(\delta))\mathbf{V}^{(m)} = \mathbf{J}^{(m)}(\delta) \quad (33)$$

式中,

$$\mathbf{J}^{(m)}(\delta) = \mathbf{I}^{N(m)}(\delta) - \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \mathbf{D}^{(m-j)}(\delta) \mathbf{V}^{(j)} \quad (34)$$

由式(33)可求得发电机节点电压导数, 从而可以求出发电机电磁功率的导数。对于每个计算步长, 不同导数阶数, 式(33)的系数矩阵保持不变, 故可采用 LU 分解技术进行快速求解, 这便较大程度地减弱了发电机暂态凸极效应引起的导纳矩阵时变性和网络方程求解产生的计算时间上的不利影响, 从而使得这种方法在满足相同精度的前提下, 计算速度较其他方法更快。

从上述分析可知: 利用 Taylor 级数方法进行电力系统暂态稳定性计算, 具有大步长、高阶数的特点^[12-14], 使其计算速度较快, 且具有递推的优点, 并且编程简单, 但是由于该方法不是 A-稳定的, 有可能得出错误的结果。

2.2 数值稳定性分析

采用 Dahlquist 试验方程^[15]:

$$\dot{x} = \lambda x, \quad \lambda \in C \quad (35)$$

式中, 符号 C 表示复数域或复平面。

在考虑常微分方程数值方法的稳定性时, 常采用式(35)作为验证方程^[1], 研究当步长 h 取固定值、步数 $n \rightarrow \infty$ 时数值误差传播的极限形态。该理论是评估数值方法品质的重要理论工具之一。

将式(35)代入式(15), 可导出:

$$x_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h}{1 - \frac{1}{2}\lambda h} x_n \quad (36)$$

将式(35)代入式(18), 可导出:

$$x_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{12}(\lambda h)^2}{1 - \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{12}(\lambda h)^2} x_n \quad (37)$$

用数值积分方法的稳定函数表示为

$$x_{n+1} = R(z)x_n, \quad z = \lambda h \quad (38)$$

其中, 采用 2 阶帕德逼近时:

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z} \quad (39)$$

采用 4 阶帕德逼近时:

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2}{1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2} \quad (40)$$

由式(39)和式(40)可知, 采用 2 阶帕德逼近时的稳定函数是 $\exp(z) = e^z$ 的 (1,1)-Padé 逼近, 采用 4 阶帕德逼近时的稳定函数是 $\exp(z) = e^z$ 的 (2,2)-Padé 逼近。因此, 2 阶帕德逼近方法与 4 阶帕德逼近方法均是 A-稳定的。

理论上, A-稳定的数值方法对步长没有任何限制。若待求系统是稳定的, 则对任何步长 h 大于 0, 数值误差在传播过程中保持有界, 且随 n 无限增大而趋于 0。因此, A-稳定也称绝对稳定。

根据上述结论可以看出, 要很好地求解微分方程问题, 就要尽量使得数值算法的稳定区域足够大, 最好是 A-稳定的, 只有这样才能采用较大的步长, 有效地缩短求解暂态过程所用的时间。因此, 帕德逼近方法比较适用于暂态稳定性数值计算。

2.3 整体求解步骤

具体求解步骤如图 1 所示。

从图 1 可以看出: 求解 x_{n+1} 时与 y_{n+1} 无关, 因此可以直接求解微分方程。这说明利用帕德逼近进行暂态稳定性计算具有并行性。

3 算例结果及分析

本文算例采用 IEEE50 机 145 节点试验系统, 暂态稳定性计算中发电机模型^[16]采用经典模型^[17]。故障设定为三相接地短路故障, 故障持续时间为 0.10 s, 整个积分时间为 1.5 s。以步长 h 等于 0.01 s 时采用隐式梯形积分法^[18-19]计算所得发电机相对功角作为基准值, 在步长 h 等于 0.01 s 时, 分别采用 2 阶帕德逼近方法和 Taylor 级数方法进行计算; 在步长 h 等于 0.02 s 时, 分别采用 4 阶帕德逼近方法和泰勒级数方法进行计算。已知发电机相对功角 δ_{12} 为

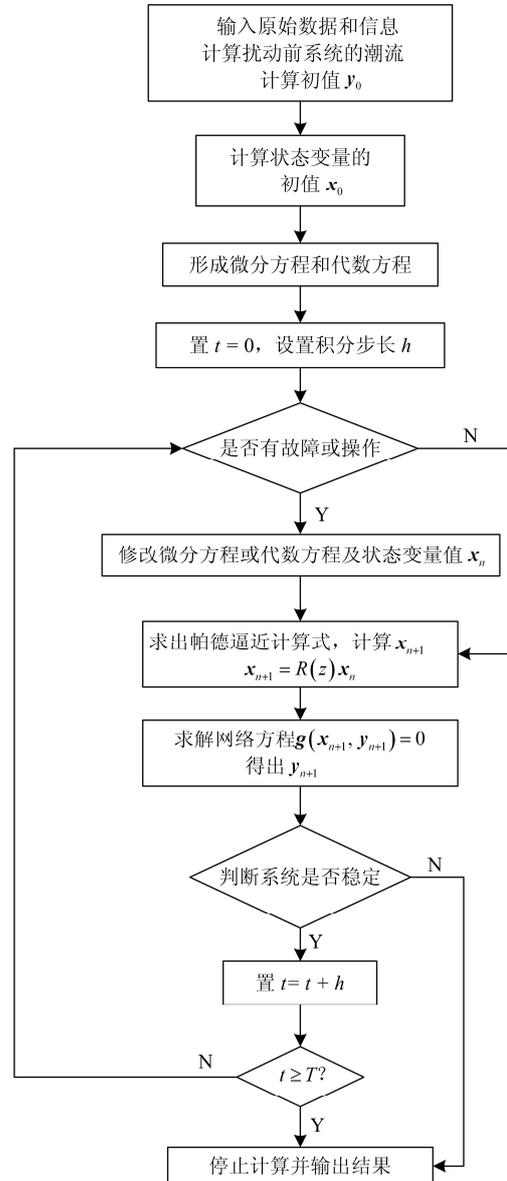


图 1 流程图

Fig. 1 Flow chart

$$\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2 \quad (41)$$

式中: δ_1 为发电机的转子角; δ_2 为描述系统惯性中心的等值转子角。将两种步长情况下计算所得发电机的相对功角与基准值进行比较, 得到步长 h 等于 0.01 s 时 2 阶帕德逼近方法和泰勒级数方法的误差曲线比较图(如图 2 所示), 步长 h 等于 0.02 s 时 4 阶帕德逼近方法和泰勒级数方法的误差曲线比较图(如图 3 所示)。

从图 2、图 3 可以看出: 在相同步长情况下, 帕德逼近方法的计算精度比泰勒级数方法的计算精度更好。

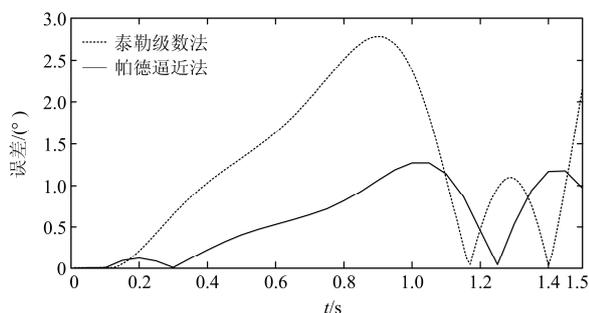


图 2 2 阶帕德逼近方法与泰勒级数方法的误差曲线比较
($h = 0.01 \text{ s}$)

Fig. 2 Error trajectories comparison of second-order Padé approximation method and Taylor series method ($h = 0.01 \text{ s}$)

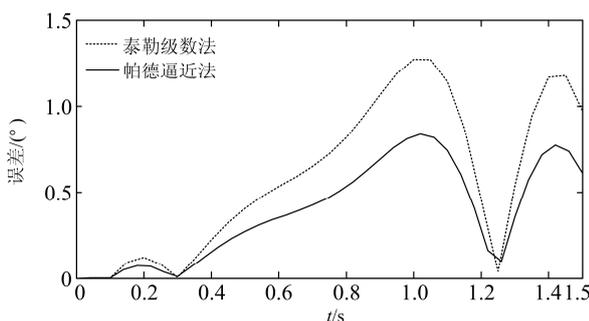


图 3 4 阶帕德逼近方法与泰勒级数方法的误差曲线比较
($h = 0.02 \text{ s}$)

Fig. 3 Error trajectories comparison of fourth-order Padé approximation method and Taylor series method ($h = 0.02 \text{ s}$)

对比图 2、图 3 可以得出：在步长增大时，采用 4 阶帕德逼近方法，仍然可以保持一定的计算精度，这说明帕德逼近方法具有长时间稳定地进行数值计算的优点。因此，采用 4 阶帕德逼近方法，在求解时间区间一定的情况下，允许采用较大的计算步长，减少总共所需的数值积分步数，提高数值计算的效率。

4 结论

本文提出基于帕德逼近的暂态稳定性数值计算方法，通过分析得出，该方法是 A-稳定的，且具有很好的并行性。

文中成功地将帕德逼近方法运用于电力系统暂态稳定性计算中，通过算例仿真，得出采用帕德逼近方法时发电机的相对功角误差曲线，将其与泰勒级数法计算结果的误差曲线进行比较，可以得出以下结论：

- 1) 采用相同步长计算时，帕德逼近方法的计算精度比泰勒级数法更好。
- 2) 当步长较大时，采用较高阶数的帕德逼近方

法能保持一定的计算精度，且计算精度仍然比采用泰勒级数法更好。

因此，帕德逼近方法整体上是一种简单、可靠的新型显式分离求解方法，比较适合于电力系统暂态稳定性及相似问题^[20-22]的数值计算。

参考文献

- [1] 汪芳宗. 大规模电力系统暂态稳定性数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [2] 汪芳宗, 何一帆. 电力系统暂态稳定性数值计算的几种新方法及其比较[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(23): 15-19.
WANG Fangzong, HE Yifan. Several new numerical methods and their comparative studies for power system transient stability analysis[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(23): 15-19.
- [3] 汪芳宗, 何一帆. 基于多级高阶辛 Runge-Kutta 方法的暂态稳定性并行计算方法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(11): 22-26, 32.
WANG Fangzong, HE Yifan. Parallel computation of transient stability based on multi-level high-order symplectic Runge-Kutta method[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(11): 22-26, 32.
- [4] 郭志忠, 柳焯. 快速高阶 Taylor 级数法暂态稳定计算[J]. 中国电机工程学报, 1991, 11(3): 8-16.
GUO Zhizhong, LIU Zhuo. Fast transient stability simulation by higher order Taylor series expansions[J]. Proceedings of the CSEE, 1991, 11(3): 8-16.
- [5] 徐英, 白雪峰, 郭志忠. 采用动态多维阶数控制的暂态稳定计算方法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(19): 81-85.
XU Ying, BAI Xuefeng, GUO Zhizhong. Transient stability calculation method using dynamic multi-dimension order control[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(19): 81-85.
- [6] 闫凯, 张保会, 瞿继平, 等. 光伏发电系统暂态建模与等值[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(1): 1-8.
YAN Kai, ZHANG Baohui, QU Jiping, et al. Photovoltaic power system transient modeling and equivalents[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(1): 1-8.
- [7] 于洋, 孙学锋, 高鹏, 等. 高压直流输电线路暂态保护分析与展望[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(2): 148-154.
YU Yang, SUN Xuefeng, GAO Peng, et al. Analysis and prospect on transient protection for HVDC transmission lines[J]. Power System Protection and Control, 2015,

- 43(2): 148-154.
- [8] 谭靖, 肖浩, 李艳, 等. 基于暂态仿真的主变涌流对线路零序过流保护的影响研究[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(19): 149-153.
TAN Jing, XIAO Hao, LI Yan, et al. Study on influence of transformer magnetizing inrush current on the line zero sequence overcurrent protection by transient simulation[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(19): 149-153.
- [9] 郑成德. Padé逼近若干问题研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2004.
ZHENG Chengde. On univariate and multivariate Padé approximation[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2004.
- [10] 法埃兹. 阿赫买德. 正交多项式及 Pade 逼近[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(7): 619-623.
FAIZ A. The orthogonal polynomials and the Pade' approximation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(7): 619-623.
- [11] 郭志忠. 发电机功角的二项式导数递推规律[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(16): 147-152.
GUO Zhizhong. The binomial derivative recursion laws of generator's power and angle[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(16): 147-152.
- [12] 徐英, 郭志忠. 多步高阶隐式泰勒级数法暂态稳定计算[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(23): 11-15, 20.
XU Ying, GUO Zhizhong. Transient stability calculation by implicit multi-step Taylor series method[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(23): 11-15, 20.
- [13] 徐英, 白雪峰, 郭志忠. 多步高阶暂态稳定计算方法[J]. 电力系统自动化, 2009, 33(15): 33-37.
XU Ying, BAI Xuefeng, GUO Zhizhong. Transient stability calculation based on explicit multi-step multi-derivative integration method[J]. Automation of Electric Power Systems, 2009, 33(15): 33-37.
- [14] 夏世威, 白雪峰, 陈士麟, 等. 多群模式 Taylor 级数法暂态稳定计算[J]. 电力系统自动化, 2010, 34(10): 24-28.
XIA Shiwei, BAI Xuefeng, CHEN Shilin, et al. Transient stability calculation by multi-machine equivalent Taylor series method[J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(10): 24-28.
- [15] GERMUND G D. A special stability problem for linear multistep methods[J]. BIT Numerical Mathematics, 1963, 3(1): 27-43.
- [16] 陈湏斐, 夏长亮, 王慧敏. 考虑齿槽效应的表贴式永磁电机空载磁场建模[J]. 电工技术学报, 2014, 29(5): 9-16.
CHEN Zhenfei, XIA Changliang, WANG Huimin. Modeling for open circuit magnetic Field prediction in slotted surface-mounted permanent-magnet machine[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(5): 9-16.
- [17] VITTAL V. Transient stability test systems for direct stability methods[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(1): 37-43.
- [18] 倪以信, 陈寿孙, 张宝霖. 动态电力系统的理论和分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [19] 汤涌. 电力系统稳定计算隐式积分交替求解[J]. 电网技术, 1997, 21(2): 1-3.
TANG Yong. An implicit integration alternating solution method for power system dynamic stability simulation[J]. Power System Technology, 1997, 21(2): 1-3.
- [20] 王涛, 张尚, 顾雪平, 等. 电力系统运行状态的趋势辨识[J]. 电工技术学报, 2015, 30(24): 171-180.
WANG Tao, ZHANG Shang, GU Xueping, et al. Trends identification of power system operating states[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(24): 171-180.
- [21] 朱俊杰, 聂子玲, 马伟明. 静止式中频电源组网系统模式切换暂态过程控制[J]. 电工技术学报, 2015, 30(24): 160-170.
ZHU Junjie, NIE Ziling, MA Weiming. Control of mode conversion transient process of medium frequency solid-state power supply[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(24): 160-170.
- [22] 姚致清, 于飞, 赵倩, 等. 基于模块化多电平换流器的大型光伏并网系统仿真研究[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(36): 27-33.
YAO Zhiqing, YU Fei, ZHAO Qian, et al. Simulation research on large-scale PV grid-connected systems based on MMC[J]. Proceedings of the CSEE, 2013, 33(36): 27-33.

收稿日期: 2016-01-15; 修回日期: 2016-03-04

作者简介:

汪芳宗(1966-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为电力系统自动化、配电系统自动化等; E-mail: fzwang@ctgu.edu.cn

聂 赟(1989-), 女, 通信作者, 硕士研究生, 研究方向为电力系统及其自动化。E-mail: 279461255@qq.com

(编辑 魏小丽)