

DOI: 10.7667/PSPC152019

# 基于 Wirtinger 不等式的时变时滞电力系统稳定性分析

钱伟, 蒋鹏冲, 车凯

(河南理工大学电气工程与自动化学院, 河南 焦作 454000)

**摘要:** 针对广域电力系统中量测时滞对系统运行产生的严重影响, 研究此类系统的稳定性问题。基于 Lyapunov 稳定性理论, 构造新型的泛函。在导数解析过程中对积分项进行分段处理, 避免了缩放性误差, 再采用 Wirtinger 不等式来减小系统保守性。同时考虑了系统状态变量积分的影响, 得到了保守性较低的保证时滞电力系统稳定的判据, 并进一步推广到电力系统受到扰动时的情形。通过典型二阶系统、单机无穷大系统与四机十一节点系统进行仿真分析, 验证了该方法的有效性。

**关键词:** 电力系统; 时变时滞; 线性矩阵不等式; 时滞裕度; Wirtinger 不等式; 稳定性判据

## Stability analysis for power system with time-delay based on Wirtinger inequality

QIAN Wei, JIANG Pengchong, CHE Kai

(School of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

**Abstract:** In view of the effect of time-delay to the system operation in the Wide Area Power System (WAPS), the stability of WAPS with time-delay is studied. Firstly, the new functional is constructed based on the Lyapunov stability theory. Secondly, this paper splits the integral into two integrals to avoid the scaling error and uses Wirtinger inequality to reduce conservative in the derivation, then considers the integration impact of the system state. The stability criterion with less conservative for time-delay power system is obtained and extended to the system with parameter changes. Finally, the effectiveness of the method is verified by simulation of the typical second-order system, the single machine system and two-area four-generator power system.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 61573130 and No. 61104119) and Program for Science & Technology Innovation Talents in Universities of Henan Province (No. 13HASTIT044).

**Key words:** power system; time-varying delay; linear matrix inequality (LMI); delay matrix; Wirtinger inequality; stability criterion

## 0 引言

随着基于相量测量单元(PMU)的广域测量技术在电力系统中的迅速发展, 大规模的电力系统并网连接逐渐成为趋势<sup>[1]</sup>。并网电力系统在实现电力的区域间输送、推动经济发展的同时, 由于其网络系统结构复杂、运行方式频繁变换, 使系统的安全稳定运行问题更为突出<sup>[2-4]</sup>。

广域电力系统中, 在对系统进行全面监测时需要进行实时的数据交换。特别是传输距离较远的系统在数据传输过程中产生不可忽略的通信时滞, 其

对电网的稳定性产生严重影响。因此研究时滞系统稳定性判据和寻求有效的稳定控制手段具有十分重要的现实意义<sup>[5-6]</sup>。

目前对于电力系统时滞稳定性研究方法主要有频域分析法与时域分析法<sup>[7]</sup>。频域法虽然可以在理论上得到系统稳定的充要条件, 但计算较为复杂, 在多机复杂系统中求解速度较慢<sup>[8]</sup>, 而且难以处理如文献[9]考虑电力系统中的运行状态及参数发生跳变时的问题。时域法在处理含有不确定项、参数变动和时变时滞系统具有优势, 目前已成为电力系统时滞系统稳定性分析的主流方法<sup>[10-11]</sup>。其中 L-K 泛函法为一种的主要方法, 但该方法本身具有一定的保守性, 如何降低时滞稳定判据的保守性成为近年来研究的焦点<sup>[12]</sup>。文献[10]构造一种 L-K 泛函, 在泛函推导过程中引入一些必要的松散项来减少判据的保守性, 并推广到含有扰动的电力系统中。文

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573130, 61104119); 河南省高校科技创新人才支持计划(13HASTIT044); 河南省高校青年骨干教师资助计划(2011GGJS-054)

献[11]采用改进自由权矩阵方法进行稳定性判据,结果降低保守性的同时由于自由变量的引入降低了计算效率。文献[8]在文献[11]的基础上利用 *gevp* 方法计算出时滞稳定上限。文献[12]引入较少的自由变量提高了运算效率,却忽略了时变时滞可微性及时滞导数对系统稳定性的影响。

基于以上分析,本文采用 L-K 泛函法进一步研究时滞影响下电力系统的稳定性问题,通过构造新型泛函,考虑电力系统状态变量积分的影响。并且在泛函求导产生积分项的处理中,先进行分段处理,再运用 Wirtinger 不等式,降低了判据的保守性。并在此基础上运用 Schur 补定理给出在不确定扰动下时滞电力系统的鲁棒稳定性判据。最后,通过仿真分析验证本文方法的有效性。

## 1 时滞电力系统模型

在电力系统模型中,对发电机的动态模型采用三阶微分方程可表示为

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \\ T_j \frac{d\omega}{dt} = (p_m - p_e)\omega_0 - D(\omega - \omega_0) \\ T'_d \frac{dE'_q}{dt} = E_f - E'_q - (X'_d - X'_d)I_d \\ U_d = X_q I_q, U_q = E'_q - X'_d I_d \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$I_d = \frac{E'_q - V \cos \delta}{X'_d + X_e} = \frac{E_Q - V \cos \delta}{X'_d + X_e} \quad p_e = \frac{E_Q V}{X_q + X_e} \sin \delta$$

$$V_g = \sqrt{\left(\frac{X_q V \sin \delta}{X_q + X_e}\right)^2 + \left(\frac{X_e E'_q + X'_d V \cos \delta}{X'_d + X_e}\right)^2}$$

式中各参数意义见文献[13]。

为维护电力系统的可靠性,采用 AVR 励磁控制时,由于时滞环节的存在其励磁系统动态方程为

$$T_a \frac{dE_f}{dt} = -K_a [V_g(t - \tau(t)) - V_{g_0}] - (E_f - E_{f_0}) \quad (2)$$

由式(1)、式(2)可以得到含时滞电力系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \\ \frac{d\omega}{dt} = (p_m - p_e) \frac{\omega_0}{T_j} - \frac{D}{T_j} (\omega - \omega_0) \\ \frac{dE'_q}{dt} = \frac{E_f - E'_q}{T'_d} - (X'_d - X'_d) \frac{I_d}{T'_d} \\ \frac{dE_f}{dt} = -\frac{K_a}{T_a} [V_g(t - \tau(t)) - V_{g_0}] - \frac{1}{T_a} (E_f - E_{f_0}) \end{cases} \quad (3)$$

对于式(3)在平衡点线性化可以得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t - h(t)) \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-h_m, 0] \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{x}(t) \in R^n$  是状态向量;  $\boldsymbol{\phi}(t)$  为  $[-h, 0]$  上连续的初始向量函数;  $h_m$  为系统稳定下的最大时滞。且对于时滞  $h(t)$  满足

$$h(t) \in [0, h_m], \dot{h}(t) \in [0, \mu]$$

在实际电力系统中,系统参数存在很多不确定扰动,故以上模型难以满足实际的应用需要。以下为含有参数扰动的电力系统模型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}_0)\mathbf{x}(t - h(t)) \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-h_m, 0] \end{cases} \quad (5)$$

假设:  $[\Delta\mathbf{A} \quad \Delta\mathbf{A}_0] = \mathbf{D}\mathbf{F}[\mathbf{E}_a \quad \mathbf{E}_b]$  为系统参数扰动项,其中  $\mathbf{D}, \mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b$  为常数矩阵(维数已知),  $\mathbf{F}$  为变化矩阵,其满足如下条件:

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T \leq \mathbf{I}$$

下面是本文推导中运用的一些引理:

引理 1<sup>[14]</sup>: 对于任意的实对称矩阵  $\mathbf{M} \geq 0$  和标量  $a, b$  且  $a > b$  及相量值函数  $\omega: [b, a] \rightarrow R^n$ , 使下面积分有意义,则有下列矩阵不等式成立:

$$\int_b^a \dot{\omega}(s)^T \mathbf{M} \dot{\omega}(s) ds \geq \frac{1}{a-b} \left( \int_b^a \dot{\omega}(s) ds \right)^T \mathbf{M} \left( \int_b^a \dot{\omega}(s) ds \right) + \frac{3}{a-b} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}$$

其中,  $\boldsymbol{\Phi} = \omega(a) + \omega(b) - \frac{2}{a-b} \int_b^a \omega(s) ds$ 。

引理 2<sup>[15]</sup>: 存在任意正整数  $m, n$ , 变量  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mathbf{R}^{n \times n} > 0$ , 矩阵  $\mathbf{W}_1^{m \times m}$ ,  $\mathbf{W}_2^{m \times n}$ , 对于

$$\Pi(\alpha, b) = \frac{1}{\alpha} \xi^T \mathbf{W}_1^T \mathbf{R} \mathbf{W}_1 \xi + \frac{1}{1-\alpha} \xi^T \mathbf{W}_2^T \mathbf{R} \mathbf{W}_2 \xi$$

若存在  $n$  阶矩阵  $\mathbf{X}$ , 并且满足  $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{X} \\ * & \mathbf{R} \end{bmatrix} > 0$ , 则下式成立:

$$\min_{\alpha \in (0, 1)} \Pi(\alpha, \beta) \geq \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \xi \\ \mathbf{W}_2 \xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{X} \\ * & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \xi \\ \mathbf{W}_2 \xi \end{bmatrix}$$

引理 3: 给定具有适当维数的矩阵  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T, \mathbf{H}, \mathbf{E}$  且

$$\mathbf{Q} + \mathbf{H}\mathbf{F}(t)\mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{F}^T(t)\mathbf{H}^T < 0$$

对所有满足  $\mathbf{F}(t)\mathbf{F}^T(t) \leq \mathbf{I}$  的  $\mathbf{F}(t)$  都成立的充分必要条件是存在一正数  $\varepsilon > 0$  使得下式成立:

$$\mathbf{Q} + \lambda^{-1} \mathbf{H}\mathbf{H}^T + \lambda \mathbf{E}^T \mathbf{E} < 0$$

## 2 时滞电力系统系统稳定性判据

首先对于无扰动电力系统(4)构造如下泛函。

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) \quad (6)$$

$$V_1(x) = \tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t) + \int_{t-h(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{t-h_m}^t x^T(s)Sx(s)ds \quad (7)$$

$$V_2(x) = \int_{-h_m}^t \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \quad (8)$$

其中:  $P = P^T > 0; Q = Q^T > 0; S = S^T > 0; R = R^T > 0;$

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \int_{t-h(t)}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_m}^{t-h(t)} x^T(s)ds \end{bmatrix}^T$$

对  $V(x)$  沿式(4)求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= 2\tilde{x}^T(t)P\dot{\tilde{x}}(t) + x^T(t)Qx(t) - \\ &(1 - \dot{h}(t))x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) + \\ &x^T(t)Sx(t) - x^T(t-h_m)Sx(t-h_m) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{V}_2(x) = h_m \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-h_m}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \quad (10)$$

在此先对式(9)、式(10)中非积分项进行化简可得

$$\dot{V}(h, x_t, \dot{x}_t) = \xi^T(t)\Pi_0(h, \dot{h})\xi(t) - \int_{t-h_m}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \quad (11)$$

其中:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-h_m) \\ \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds \\ \frac{1}{h_m-h(t)} \int_{t-h_m}^{t-h(t)} x(s)ds \end{bmatrix}^T$$

$$\Pi_0(h, \dot{h}) = He(G_0^T(h)PG_1(\dot{h})) + G_2(\dot{h})$$

$$He(E) = E + E^T; \quad H = h_m - h(t)$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dot{h}-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\dot{h} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 =$$

$$\begin{bmatrix} Q + S + h_m A^T R A & h_m B^T R A \\ h_m B^T R A & (\dot{h}-1)Q + h_m B^T R B \\ & & -S \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

注 1: 对于积分项  $\int_{t-h_m}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$  的处理上, 本文中将其积分区间  $[t-h_m, t]$  分解为  $[t-h_m, t-h(t)]$  与  $[t-h(t), t]$  两部分进行分段处理。避免了文献[7]、文献[12]将其放缩为  $\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$ , 造成结果保守性较大的问题。

对  $\int_{t-h_m}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$  分解后利用引理 1 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{t-h_m}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds &= \\ \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds + \int_{t-h_m}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds &\geq \\ \frac{1}{h(t)} \xi^T \Gamma_1^T R \Gamma_1 \xi + \frac{3}{h(t)} \xi^T \Gamma_2^T R \Gamma_2 \xi + \\ \frac{1}{h_m-h(t)} \xi^T \Gamma_3^T R \Gamma_3 \xi + \frac{3}{h_m-h(t)} \xi^T \Gamma_4^T R \Gamma_4 \xi &= \\ \frac{1}{h(t)} \xi^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}^T \tilde{R} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \xi + \\ \frac{1}{h_m-h(t)} \xi^T \begin{bmatrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix}^T \tilde{R} \begin{bmatrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \end{bmatrix} \xi \end{aligned} \quad (12)$$

式中:  $\tilde{R} = \text{diag}(R, 3R);$

$$\Gamma_1 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]; \quad \Gamma_2 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0];$$

$$\Gamma_3 = [0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]; \quad \Gamma_4 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2].$$

设  $\alpha = \frac{h_m}{h(t)}$ , 则  $\frac{h_m}{h_m-h(t)} = \frac{1}{1-\alpha}$ , 利用引理 2 得

$$\int_{t-h_m}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \geq \frac{1}{h_m} \xi^T G_3^T \Pi_1 G_3 \xi \quad (13)$$

式中:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} R & X_{11} & X_{12} \\ 3R & X_{21} & X_{22} \\ & R & \\ & & 3R \end{bmatrix}$$

$$G_3 = [\Gamma_1^T \quad \Gamma_2^T \quad \Gamma_3^T \quad \Gamma_4^T]^T$$

因此, 由式(11)与式(13)可以得到

$$\dot{V}(h, x_t, \dot{x}_t) = \xi^T(t)\Pi_0(h)\xi(t) - \frac{1}{h_m} \xi^T G_3^T \Pi_1 G_3 \xi \quad (14)$$

注 2: 判据的推导过程中对于积分项的处理运用引理 1 Wirtinger 不等式进行变换, 得出的稳定性判据不仅与状态变量  $x(t)$  和  $x(t-\tau)$  有关, 还考虑了  $\int_{t-h(t)}^t x(s)ds$  的影响, 降低了判据的保守性。

注 3: Wirtinger 不等式与文献[16]引用的 Jensen

不等式相比较为在不等式右侧多一正定项, 其放缩程度更小, 减小了判据推导中因不等式的引用而产生的保守性。

对于式(14) $\dot{V}(h, \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t)$  利用 schur 补引理可得如下定理。

定理一: 如果存在一个维数为  $3n \times 3n$  的矩阵  $\mathbf{P} > 0$ ,  $n \times n$  维矩阵  $\mathbf{S} > 0$ ,  $\mathbf{Q} > 0$ ,  $\mathbf{R} > 0$  和一个维数为  $2n \times 2n$  的自由矩阵  $\mathbf{X}$  使如下条件在  $h \in [0, h_m]$ ,  $\dot{h} \in [0, \mu]$  时满足, 则系统(4)是渐进稳定的。

$$\tilde{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} & \mathbf{E}_{15} & h\mathbf{A}^T\mathbf{R} \\ & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & \mathbf{E}_{25} & h\mathbf{B}^T\mathbf{R} \\ & & \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} & \mathbf{E}_{35} & 0 \\ & & & \mathbf{E}_{44} & \mathbf{E}_{45} & 0 \\ & & & & \mathbf{E}_{55} & 0 \\ & & & & & -h\mathbf{R} \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

其中:

$$\mathbf{E}_{11} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{A} + \mathbf{P}_{12} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} - \frac{2}{h}\mathbf{R} - \frac{2}{h}\mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{E}_{12} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{B} - (1-\dot{h})\mathbf{P}_{12} + (1-\dot{h})\mathbf{P}_{13} - \frac{1}{h}\mathbf{R} - \frac{1}{h}\mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{E}_{13} = -\mathbf{P}_{13} + \frac{\mathbf{X}_{11}}{h_m} - \frac{\mathbf{X}_{12}}{h_m} - \frac{\mathbf{X}_{21}}{h_m} - \frac{\mathbf{X}_{22}}{h_m}$$

$$\mathbf{E}_{14} = h\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{12} + h\mathbf{P}_{22} + \frac{6}{h_m}\mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{E}_{15} = H \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{13} + H \cdot \mathbf{P}_{23} + \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{12} + \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{12}^T$$

$$\mathbf{E}_{22} = (\dot{h}-1)\mathbf{Q} - \frac{8}{h_m}\mathbf{R} - \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{11}^T - \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{12}^T + \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{21}^T +$$

$$\frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{22}^T - \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{11} - \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{12} + \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{21} + \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{22}$$

$$\mathbf{E}_{23} = -\frac{2}{h_m}\mathbf{R} + \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{11} - \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{12} - \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{21} + \frac{1}{h_m}\mathbf{X}_{22}$$

$$\mathbf{E}_{24} = h\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{12} - h \cdot (1-\dot{h})\mathbf{P}_{22} + h \cdot (1-\dot{h})\mathbf{P}_{23}^T +$$

$$\frac{6}{h_m}\mathbf{R} + \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{21}^T + \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{22}^T$$

$$\mathbf{E}_{25} = H\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{13} + H(\dot{h}-1)\mathbf{P}_{23} + H(1-\dot{h})\mathbf{P}_{33} -$$

$$\frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{12} + \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{22} + \frac{3}{h_m}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{E}_{33} = -\mathbf{S} - \frac{4}{h_m}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{E}_{34} = \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{22} - \frac{2}{h_m}\mathbf{X}_{21} - h\mathbf{P}_{32}; \quad \mathbf{E}_{35} = -H\mathbf{P}_{33} + \frac{6}{h_m}\mathbf{R}$$

$$\mathbf{E}_{44} = -\frac{12}{h_m}\mathbf{R}; \quad \mathbf{E}_{45} = -\frac{4}{h_m}\mathbf{X}_{22}; \quad \mathbf{E}_{55} = -\frac{12}{h_m}\mathbf{X}_{22}$$

对于含有扰动的电力系统模型(5)时, 与无扰动情况比较只需让  $\mathbf{A}_0$  与  $\mathbf{A}_1$  分别用  $\mathbf{A}_0 + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_a$  和  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_b$  替换可得

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_1 + \Sigma_1^T \mathbf{F}^T \Sigma_2^T + \Sigma_2 \mathbf{F} \Sigma_1 \quad (16)$$

式中:

$$\Sigma_1 = [\mathbf{E}_a \quad \mathbf{E}_b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\Sigma_2 = [\mathbf{D}^T \mathbf{P}_{11} \quad 0 \quad 0 \quad h\mathbf{D}^T \mathbf{P}_{12} \quad H\mathbf{D}^T \mathbf{P}_{13} \quad h\mathbf{D}^T \mathbf{R}]^T$$

运用引理 3 可得

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_1 + \lambda \Sigma_1^T \Sigma_1 + \lambda^{-1} \Sigma_2 \Sigma_2^T \quad (17)$$

再运用 schur 补引理可以得到如下定理。

定理二: 如果存在  $\lambda > 0$ , 一个维数为  $3n \times 3n$  的矩阵  $\mathbf{P} > 0$ ,  $n \times n$  维矩阵  $\mathbf{S} > 0$ ,  $\mathbf{Q} > 0$ ,  $\mathbf{R} > 0$  和一个维数为  $2n \times 2n$  的自由矩阵  $\mathbf{X}$  使如下条件对于  $h \in [0, h_m]$ ,  $\dot{h} \in [0, \mu]$  满足, 则系统(5)是鲁棒渐进稳定的。

$$\bar{\Pi}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{11} & \bar{\mathbf{E}}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} & \mathbf{E}_{15} & h\mathbf{A}^T\mathbf{R} & \mathbf{P}_{11}\mathbf{D} \\ & \bar{\mathbf{E}}_{22} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & \mathbf{E}_{25} & h\mathbf{B}^T\mathbf{R} & 0 \\ & & \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} & \mathbf{E}_{35} & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{E}_{44} & \mathbf{E}_{45} & 0 & h\mathbf{P}_{12}^T\mathbf{D} \\ & & & & \mathbf{E}_{55} & 0 & H\mathbf{P}_{13}^T\mathbf{D} \\ & & & & & -h\mathbf{R} & h\mathbf{R}\mathbf{D} \\ & & & & & & -\lambda \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

式中:  $\bar{\mathbf{E}}_{11} = \mathbf{E}_{11} + \lambda \mathbf{E}_a^T \mathbf{E}_a$ ;  $\bar{\mathbf{E}}_{12} = \mathbf{E}_{12} + \lambda \mathbf{E}_a^T \mathbf{E}_b$ ;

$$\bar{\mathbf{E}}_{22} = \mathbf{E}_{22} + \lambda \mathbf{E}_b^T \mathbf{E}_b.$$

其他参数与定理一等同。

### 3 算例分析

#### 3.1 典型二阶系统

为验证本文方法在保守性上的优越性, 首先我们在典型二阶系统进行比较分析, 其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

由于定理一为由线性矩阵不等式形式给出的, 可通过线性矩阵不等式工具箱进行求解。如表 1 给出了不同大小  $\mu$  下的运算结果, 从中可以看出, 本文方法所计算的最大时滞高于其他文献。在  $\mu = 0$

时, 文献[17]的结果与本文方法一样, 但该方法仅对定时滞有效。

表 1 对于不同  $\mu$  值所求的最大时滞值

Table 1 Maximal time delay for different  $\mu$

$\mu$	0	0.1	0.2	0.5	0.8
文献[16]	4.606	3.703	3.114	2.337	1.524
文献[18]	4.472	3.611	3.047	2.072	1.590
文献[19]	1.632	1.632	1.632	1.632	1.632
文献[17]	6.059	-	-	-	-
本文方法	6.059	4.724	3.87	2.67	2.56

### 3.2 单机无穷大系统

验证本文方法在电力系统中的有效性, 选用单机无穷大系统如图 1, 具体参数见文献[20], 其中矩阵参数  $A, B$  具体数值如下:

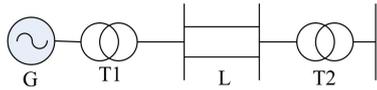


图 1 单机无穷大系统

Fig. 1 Single-machine infinite-bus system

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 376.9911 & 0 & 0 \\ -0.0963 & -0.7000 & -0.0801 & 0 \\ -0.0480 & 0 & -0.1667 & 0.1000 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38.0187 & 0 & -95.256 & 0 \end{bmatrix}$$

借助 Matlab 中的线性矩阵不等式(LMI)工具箱, 可以得到系统在无扰动时的稳定裕度为 65.4 ms, 如图 2 给出了当时滞为 66 ms 时发电机功角与角速度变化情况。从图中可以看出此时单机系统不稳定。

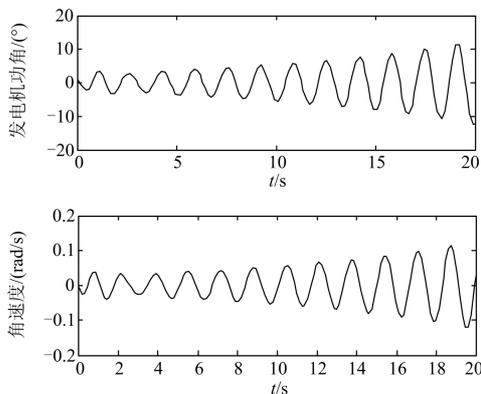


图 2  $h=66$  ms 时系统的仿真结果

Fig. 2 System response with time delay of 66 ms

对于电机励磁系统存在扰动时, 假设励磁放大系数扰动为随机的, 则考虑扰动影响后的实际放大系数为

$$K'_a = K_a + r$$

式中:  $K_a$  为励磁放大系数整定值;  $r$  为一标量, 表示励磁放大系数的扰动情况。

当研究励磁扰动  $r$  对单机无穷大系统稳定性的影响时, 矩阵  $D, E_a, E_b$  的取值为

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}, E_a = 0, E_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

借助 Matlab 中的线性矩阵不等式(LMI)工具箱, 求出不同励磁扰动  $r$  下的系统稳定裕度, 并与文献[10]与文献[12]的结果进行比较分析。

从表 2 中的数据及图 3 中可以得到, 随着励磁放大系数中扰动项  $r$  的增大, 单机系统的稳定裕度有所减小。但与文献[10]和文献[12]相比, 在相同扰动大小时, 本文采用的方法所得到的时滞裕度更大, 证明了本文采用的稳定性判据的保守性较小。

表 2 不同  $r$  值的时滞稳定裕度

Table 2 Comparison of stability with different  $r$

$r$	文献[10]	文献[12]	本文方	$r$	文献[10]	文献[12]	本文方
	h/s	h/s	法 h/s		h/s	h/s	法 h/s
0	0.065 4	0.060 9	0.065 4	4	0.043 9	0.047 9	0.062 4
0.5	0.057 0	0.058 7	0.065 0	5	0.039 7	0.047 5	0.061 7
1	0.055 2	0.057 6	0.064 7	6	0.035 3	0.044 4	0.060 9
1.5	0.053 4	0.055 7	0.064 3	7	0.030 7	0.041 7	0.060 1
2	0.051 6	0.054 5	0.063 9	8	0.026 3	0.039 2	0.059 3
2.5	0.049 7	0.053 0	0.063 5	9	0.022 0	0.036 3	0.058 6
3	0.047 8	0.051 5	0.063 2	10	0.018 0	0.034 3	0.057 8

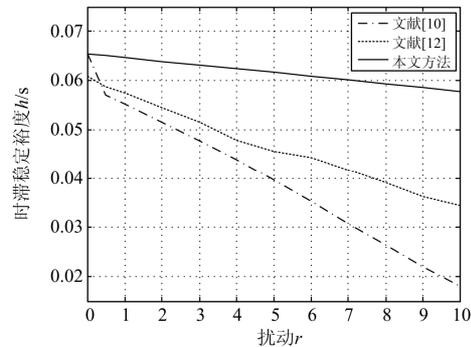


图 3 3 种方法稳定运行裕度

Fig. 3 Comparison of stability margin between three methods

### 3.3 4 机 11 节点算例分析

为进一步验证本文方法的有效性, 采用如图 4

的 4 机 11 节点系统进行分析。

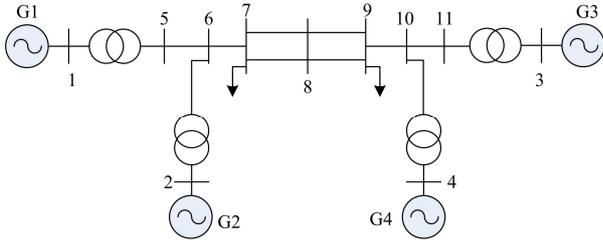


图 4 4 机 11 节点系统

Fig. 4 Four-generator 11-bus power system

从文献[8]中可以得到系统中的降阶后的状态矩阵  $A$  与时滞矩阵  $B$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 \\ -0.073 & 0.065 & 0.004 & -0.730 & 0.272 & 0.076 \\ 0.058 & -0.087 & 0.009 & 1.160 & -0.343 & -0.134 \\ 0.008 & 0.011 & -0.082 & -0.020 & 0.047 & -0.554 \end{bmatrix}$$

$B =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.234 & -0.839 & 0.010 \\ 0 & -0.0011 & 0.001 & -0.348 & -1.362 & -0.138 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0.049 & -0.290 & -0.638 \end{bmatrix}$$

由表 3 可以看出，本文所采用的方法求得的最大时滞均大于其他文献，即验证了本文方法的有效性，也说明了该方法在多机系统中的可行性。

表 3 不同方法求得的时滞上界

Table 3 Maximal  $h_m$  comparison with different methods

方法	文献[7]	文献[8]	文献[5]	文献[21]	本文方法
$h/s$	0.328	0.288	0.195	0.328	0.44

## 4 结论

针对时滞对电力系统的严重影响，本文研究了时变时滞电力系统的稳定性问题。基于 Lyapunov 理论，通过构造新的 L-K 泛函，在泛函导数推导过程中引用 Wirtinger 不等式，得到了保守性较小的时滞电力系统稳定性判据。通过算例分析验证了本文方法的有效性和优越性。然而采用 Lyapunov 理论在泛函构造与导数解析过程中不可避免的存在一定的保守性，如何降低判据保守性的问题今后还需进一步研究。

## 参考文献

- [1] 程云峰, 张欣然, 陆超. 广域测量技术在电力系统中的应用研究进展[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(4): 145-153.  
CHENG Yunfeng, ZHANG Xinran, LU Chao. Research progress of the application of wide area measurement technology in power system[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(4): 145-153.
- [2] 张子泳, 胡志坚, 刘宇凯. 计及广域信号时变时滞影响的大型双馈风力发电系统附加鲁棒阻尼控制[J]. 电工技术学报, 2014, 29(4): 246-255.  
ZHANG Ziyong, HU Zhijian, LIU Yukai. Additional robust damping control of large scale DFIG-based wind power generation system with wide-area signals' time-varying delay influence[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(4): 246-255.
- [3] 李婷, 吴敏, 何勇. 计及广域测量系统时滞影响的灵活交流输电系统阻尼控制器多目标设计[J]. 电工技术学报, 2014, 29(8): 227-234.  
LI Ting, WU Min, HE Yong. Multi-objective design of FACTS damping controller based on WAMS with signal transmission delay[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(8): 227-234.
- [4] 姚致清, 张茜, 刘喜梅. 基于 PSCAD/EMTDC 的三相光伏并网发电系统仿真研究[J]. 电力系统保护与控制, 2010, 38(17): 76-81.  
YAO Zhiqing, ZHANG Qian, LIU Ximei. Research on simulation of a three-phase grid-connected photovoltaic generation system based on PSCAD/EMTDC[J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(17): 76-81.
- [5] YANG Bo, SUN Yuanzhang. A new wide area damping controller design method considering signal transmission delay to damp interarea oscillations in power system[J]. Journal of Central South University, 2014, 21(11): 4193-4198.
- [6] 古丽扎提·海拉提, 王杰. 多时滞广域测量电力系统稳定分析与协调控制器设计[J]. 电工技术学报, 2014, 29(2): 279-289.  
GULIZHATI Hailati, WANG Jie. Multiple time delays analysis and coordinated stability control for power system wide area measurement[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(2): 279-289.
- [7] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制——自由权矩阵方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [8] 马静, 李俊臣, 李益楠, 等. 基于改进自由权矩阵与广义特征值的时滞稳定上限计算方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(18): 1-8.

- MA Jing, LI Junchen, LI Yanan, et al. Research on time-delay upper-bound of power system wide-area damping controllers based on improved free-weighting matrices and generalized eigenvalue problem[J]. *Power System Protection and Control*, 2014, 42(18): 1-8.
- [9] 马静, 李益楠, 李俊臣, 等. 考虑电力系统跳变特性的时滞稳定控制策略[J]. *电网技术*, 2015, 39(4): 1033-1038.
- MA Jing, LI Yanan, LI Junchen, et al. A time-delay stability control strategy considering jump characteristic of power system[J]. *Power System Technology*, 2015, 39(4): 1033-1038.
- [10] 贾宏杰, 安海云, 余晓丹. 电力系统时滞依赖型鲁棒稳定判据及其应用[J]. *电力系统自动化*, 2010, 34(3): 6-11.
- JIA Hongjie, AN Haiyun, YU Xiaodan. A delay-dependent robust stability criterion for power system and its application[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2010, 34(3): 6-11.
- [11] 安海云. 基于自由权矩阵理论的电力系统时滞稳定性研究[D]. 天津: 天津大学, 2011.
- AN Haiyun. The research of time delay stability for power system based on free-weighting matrices theory[D]. Tianjin: Tianjin University, 2011.
- [12] 孙国强, 屠越, 孙永辉, 等. 时变时滞电力系统鲁棒稳定性的改进型判据[J]. *电力系统自动化*, 2015, 39(3): 59-62.
- SUN Guoqiang, TU Yue, SUN Yonghui, et al. An improved robust stability criterion for power systems with time-varying delay[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(3): 59-62.
- [13] 厉文秀. 随机时滞电力系统稳定性分析[J]. *电力与能源*, 2015, 36(1): 10-15.
- LI Wenxiu. Stability analysis for stochastic time delay power system[J]. *Power and Energy*, 2015, 36(1): 10-15.
- [14] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(9): 2860-2866.
- [15] PARK P G, KO J W, JEONG C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2011, 47(1): 235-238.
- [16] 钱伟, 高超. 基于凸组合方法的变时滞电力系统稳定性判据[J]. *电力系统保护与控制*, 2015, 43(19): 37-42.
- QIAN Wei, GAO Chao. A stability criterion for power system with time-varying delay based on convex combination[J]. *Power System Protection and Control*, 2015, 43(19): 37-42.
- [17] GU K, KHARITONOV V L, CHEN J. Stability of time-delay systems[M]. Berlin: Birkhauser, 2003.
- [18] SUN J, LIU G P, CHEN J, et al. Improve delay-range dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 466-470.
- [19] FRIDMAN E, SHAKED U. Input-output approach to stability and  $L_2$ -gain analysis of systems with time-varying delays[J]. *Systems and Control Letters*, 2006, 55(12): 1041-1053.
- [20] 贾宏杰, 尚蕊, 张宝贵. 电力系统时滞稳定裕度求解方法[J]. *电力系统自动化*, 2007, 31(2): 5-11.
- JIA Hongjie, SHANG Rui, ZHANG Baogui. Computation of delay stability margin of electric power systems[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2007, 31(2): 5-11.
- [21] CHAIBI N, TISSIR E H. Delay dependent robust stability of singular systems with time-varying delay[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2012, 10(3): 632-638.

收稿日期: 2015-11-18; 修回日期: 2016-01-09

作者简介:

钱伟(1978-), 男, 通信作者, 博士, 教授, 研究方向为鲁棒控制、智能控制等; E-mail: qwei@hpu.edu.cn

蒋鹏冲(1991-), 男, 硕士研究生, 主要从事电力系统稳定性分析与控制方面的研究; E-mail: jiangpengchongaaa@163.com

车凯(1992-), 男, 硕士研究生, 主要从事信息处理与网络控制的研究。E-mail: ck15239008609@163.com

(编辑 周金梅)