模拟通道数最小的 PMU 优化配置方法

何昆仑，张庆超，郑明忠

(天津大学电气与自动化工程学院，天津 300072)

摘要：提出了一种基于 0-1 整数规划算法的改进的 PMU 配置模型，该模型具有良好的适应性，而且 0-1 整数规划算法计算速度快，结果精确可靠。通过该模型可以得出全部的所需 PMU 数最小的优化方案，进而在该模型的基础上提出了 PMU 模拟通道数最小化的处理方法。该处理方法可以减少因电力系统母线数量庞大而产生的配置 PMU 所需的资金。最后通过对 IEEE14 节点系统、IEEE30 节点系统以及新英格兰 39 节点系统的仿真计算，验证了所提出的模型和处理方法的有效性，可供相关研究者参考。

关键词：相量量测单元；模拟通道；0-1 整数规划；最优配置；零注入节点

Optimal PMU placement with minimum analog channels

HE Kunlun, ZHANG Qingchao, ZHENG Mingzhong

(School of Electrical Engineering & Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: This paper puts forward an improved PMU placement model based on 0-1 integer programming algorithm, which has a good adaptability. The 0-1 integer programming algorithm possesses a fast computational speed with accurate and reliable results. By this model, all optimization schemes with minimum PMU values can be got and a corresponding approach of minimizing analog channels PMU numbers is proposed. This method could effectively reduce the cost needed for PMU configuration due to its enormous bus numbers in power system. At last, the validity of this model and its processing methods can be proved by emulation calculations, including IEEE-14 buses system, IEEE-30 buses system and New England 39 buses system. For future researchers, this model can serve as references.

Key words: phasor measurement unit (PMU); analog channel; 0-1 integer programming; optimal placement; zero-injection bus

中图分类号： TM71 文章编号： 1674-3415(2015)24-0014-05

0 引言

相量量测单元(PMU)是基于全球定位系统(GPS)技术的一种新型量测装置，其能够在统一的时标下对母线电压相量(包括幅值和相角)高精度测量，并将数据通过高速通信网络传输到调度中心，因此 PMU 在电力系统状态估计[1]、稳定预测与控制[2-3]和故障定位[4]等方面的作用日益显著。

如果全网所有母线都配置了 PMU，那么系统就是全局可观测的，但由于 PMU 的价格比较昂贵，这样做无疑增加了系统的一次性投资，而分阶段配置则比较现实经济，即在初期安装一定数量的 PMU 使得系统完全可观，而后逐步增加 PMU 的数量，提高系统观测的冗余度[5]。

系统的可观测性算法主要有两类：数值分析方法和网络拓扑方法。数值分析是通过检查信息矩阵是否满秩来确定[6]。网络拓扑方法的核心思想是检查配置的量测集能否建立满秩的支撑树以覆盖全网所有节点。由于系统庞大，导致数值分析方法运算量巨大，网络拓扑方法则较之有更好的实用性[7]。

近年来，PMU 最优配置(Optimal PMU Placement，OPP)问题成为一大研究热点，并取得了可观的研究成果。文献[8]给出的是遗传算法以及在此基础上的改进算法，由于该方法依赖于原始群体、适应函数和遗传算子等，所以优化的结果可能不是全局最优解。文献[9]提出了一种模拟退火法，其求解速度慢，难以收敛。类似的方法还有粒子群算法[10]、禁忌搜索算法[11]和最小生成树[12]等。以上这些方法均属于启发式算法，其最大不足之处在于收敛速度慢，并且难以获得全局最优解。0-1 整数规划算法是一种确定性的数学算法，文献[13]的算法就是基于 0-1 整数规划算法，其结论具有更好的适应性，而且可

以考虑更复杂的约束条件，该算法计算速度快，能够满足实际大电力系统的要求。

以上文献所提出的方法都得出了一种或者几种 PMU 配置的优化方案，但是在实际的大电力系统中，PMU 的安装可能会遇到各种各样的困难，例如，母线无法安装 PMU、通信设施无法满足要求等。所以在 PMU 数最小的前提下，一个算法能够得出全部的优化方案才能使电力系统更灵活地选择。另外，PMU 的价格在一定程度上取决于它的模拟通道数，在大电力系统中，PMU 的经济性问题更显得尤为突出。文献[6]中提出了一种受 PMU 通道数限制的 0-1 整数规划算法，但是该算法假设每个 PMU 都拥有相同的通道数。如果一个电力公司拥有一批不同通道数的 PMU，该算法就失去了适用性。显然，这些要求使得该问题成为了一个新的 NP 问题。

本研究提出了一种基于 0-1 整数规划的新算法，此算法一方面能够求出全部的 PMU 数最小的优化方案，另一方面又能满足通道数最小的问题。在考虑零注入节点的影响时，对零注入节点做了优化处理。本研究对 IEEE14 节点系统、IEEE30 节点系统以及新英格兰 39 节点系统进行了仿真计算。

1　PMU 优化配置模型

PMU 的模拟通道包括电压模拟通道和电流模拟通道。通常电压模拟通道只是用于测量 PMU 安装点的电压相量，电流模拟通道用于测量与 PMU 安装点相连支路的电流相量。所以每个 PMU 的电压模拟通道都是足够的，本文中的通道数均是指电流模拟通道数。

电力系统的可观性是指电力系统每条母线的电压相量均可被直接或者间接测得。从可观性原理出发，本研究基于以下规则确定系统全局可观测[14]。

规则 1. 如果节点 i 安装了 PMU，则节点 i 的电压相量可以直接被测量，即节点 i 可观；

规则 2. 如果节点 i 安装了 PMU，且与其相连的相邻节点 j 之间的支路的电流相量可被测量(即安装了电流模拟通道)，则节点 j 的电压相量可以通过欧姆定律计算得到，即节点 j 可观；

规则 3. 如果节点 i 为零注入节点，且与其相连的所有相邻节点的个数为 m，如果这 m+1 个节点中有 m 个节点可观，则可以根据欧姆定律和基尔霍夫定律计算得到剩下那个节点的电压相量，即这 m+1 个节点都可观。

1.1 基本模型

0-1 整数规划的核心思想是使 PMU 数最小，同时保证系统中的每个节点至少被一个 PMU 所观测，这两点即为该优化问题的目标函数和约束条件。假设一个系统的节点数为 n，则 PMU 优化配置的基本模型如式(1)所示。

$$\begin{cases}\min\sum_{i=1}^{n}x_i \\ \boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}\geq\boldsymbol{b}_{n\times 1}\end{cases} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{X}_{n\times 1}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 表示的是系统所有节点构成的列向量；x_i 为二进制变量(式(2))；矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 为系统节点的关联矩阵，矩阵中的元素 a_{ij} 定义为式(3)；向量 $\boldsymbol{b}_{n\times 1}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$。

$$x_i=\begin{cases}1 & i\text{节点装设PMU}\\ 0 & i\text{节点未装设PMU}\end{cases} \tag{2}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 1 & i\text{与}j\text{相连}\\ 0 & i\text{与}j\text{不相连}\end{cases} \tag{3}$$

1.2 改进的模型

假设 $\boldsymbol{x}_{s1}=[x_{s1,1},x_{s1,2},\cdots,x_{s1,n}]^{\mathrm{T}}$ 是第一个 PMU 数最少的优化方案，PMU 数为 m，为了获得全部的优化方案，且不与之前获得的方案重复，则对关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 做以下修改：

$$\boldsymbol{A}_{(n+1)\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n}\\ -x_{s1,1},-x_{s1,2},\cdots,-x_{s1,n}\end{bmatrix}_{(n+1)\times n} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{b}_{(n+1)\times n}=\left[1,1,\cdots,1,-(m-1)\right]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

如果得出的第二个方案 $\boldsymbol{x}_{s2}$ 与 $\boldsymbol{x}_{s1}$ 不同，则应该满足不等式 $\boldsymbol{x}_{s1}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{s2}\leq(m-1)$，对不等式两边同时取反，则有 $-\boldsymbol{x}_{s1}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{s2}\geq-(m-1)$。

同理，当已获得优化方案数为 h 时，关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_{(n+h)\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n}\\ -x_{s1,1},-x_{s1,2},\cdots,-x_{s1,n}\\ -x_{s2,1},-x_{s2,2},\cdots,-x_{s2,n}\\ \vdots\\ -x_{sh,1},-x_{sh,2},\cdots,-x_{sh,n}\end{bmatrix}_{(n+h)\times n} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{b}_{(n+h)\times n}=\left[1,1,\cdots,1,-(m-1),\cdots,-(m-1)\right]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

这样，优化模型就变为

$$\begin{cases}\min\sum_{i=1}^{n}x_i\\ \boldsymbol{A}_{(n+h)\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}\geq\boldsymbol{b}_{(n+h)\times 1}\end{cases} \tag{8}$$

每次迭代后均要改写关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$，当 PMU 总数增加时，程序迭代结束。

通过改进的模型，可以得出全部的优化方案，每个方案 PMU 数都相等，但是所有 PMU 的通道数总和未必相等，通过进一步的优化，我们可以得出最小通道数的所有优化方案。

1.3 考虑零注入节点模型

零注入节点是指该节点既无发电机也无负荷。考虑零注入节点可以进一步减少 PMU 的配置数目。如图 1 所示，节点 i 为零注入节点，其他四个节点与其相连。

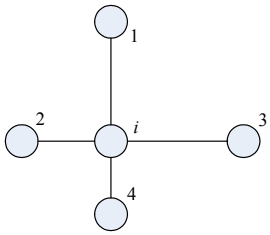

图 1 考虑零注入节点的 PMU 配置

Fig. 1 PMU configuration with zero-injection buses

令 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{AX}$，$\boldsymbol{f}$ 为节点可观测函数矩阵。文献[15]中对零注入节点的处理方法如下：

$$f_i + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \geq 4 \tag{9}$$

其中 $f_i = x_i + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$，$f_i \geq 1$ 表示 i 节点可观，$f_i = 0$ 表示 i 节点不可观。式(9)中 5 个节点当有 4 个可观测，则根据规则 3 第 5 个节点就观测。

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 需要做如下修改，若节点 i 对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行，即 $\boldsymbol{A}_i$。那么式(1)中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 则需添加一行 $\boldsymbol{A}_{n+1}=\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_4$。

1.4 通道数最小化

考虑到 PMU 的价格昂贵，在初期配置 PMU 时，可以只需要使得电力系统的节点全部可观则即可。在 PMU 优化配置的模型中，多数文献均是在模拟通道充足的前提下进行的优化运算，没有考虑模拟通道数最小化的问题。而 PMU 的价格也在一定程度上取决于模拟通道数的多少，所以研究通道数最小化的 PMU 配置方法具有实际的意义。

本研究对通道数最小化的处理方法如下，假设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 是其中一个 PMU 数最少的优化方案，节点 1 和节点 3 配置 PMU，且节点 1 和节点 3 有且只有一个公共的邻节点 2。现在只关注前三个节点的通道如何配置，则有

$$\boldsymbol{A}_1 = [1\ 1\ 0] \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = [0\ 0\ 1] \tag{11}$$

对 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_3$ 的对应元素做逻辑“与”运算，当运算结果为 1 时，则对 $\boldsymbol{A}_3$ 对应元素置 0，得如下结果：

$$\boldsymbol{A}_1 = [1\ 1\ 0] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = [0\ 0\ 1] \tag{13}$$

式(12)和式(13)分别表示节点 1、3 安装 PMU，支路 1-2 安装模拟通道，支路 2-3 不安装模拟通道。同理，将 $\boldsymbol{A}_1$ 与其他安装 PMU 的节点所在的行做同样的处理，然后将 $\boldsymbol{A}_3$ 与其他安装 PMU 的节点所在的行也做同样的处理，以此类推，最后得到新的矩阵 $\boldsymbol{A}$。此时，安装 PMU 的节点所对应的行中 1 的个数减 1 即为此 PMU 的通道数，而且可以得出安装模拟通道的支路。另外，此处理方法还适用于一些特殊情况，例如某条支路无法安装模拟通道或者安装成本过高等。

2 算例

上一节具体介绍了 0-1 整数规划模型以及零注入功率节点的处理方法。这一节将具体应用到 IEEE14 节点系统、IEEE30 节点系统和新英格兰 39 节点系统。

对于 IEEE14 节点系统，当不考虑零注入节点时，优化所得最小 PMU 数为 4，其优化方案有 5 种；当考虑零注入节点时，优化所得最小 PMU 数为 3，优化方案只有一种。在表 1 中给出了不考虑零注入节点时 PMU 的配置和模拟通道数；表 2 给出的是考虑零注入节点时 PMU 的配置和安装模拟通道的支路。

表 1 不考虑零注入节点 IEEE-14 节点系统仿真结果

Table 1 IEEE-14 buses system simulation results without zero-injection buses

方案	PMU 配置节点(第一行)/ PMU 通道数(第二行)				平均通道数
1	2	6	7	9	2.75
	4	3	2	2	
2	2	6	8	9	2.5
	4	3	1	2	
3	2	7	11	13	2.5
	4	2	2	2	
4	2	7	10	13	2.5
	4	2	1	3	
5	2	8	10	13	2.5
	4	1	2	3	

表 2 考虑零注入节点 IEEE-14 节点系统仿真结果

Table 2 IEEE-14 buses system simulation results with zero-injection buses

	PMU1	PMU2	PMU3	平均通道数
PMU 配置节点	2	6	9	3.33
PMU 通道数	4	3	3	
安装通道的支路	L1-2 L2-3 L2-4 L2-5	L6-11 L6-12 L6-13	L7-9 L9-10 L9-14	

注：L1-2 表示节点 1 和节点 2 之间的支路，以下类似。

从表 1 中可以看出，PMU 数最小且模拟通道数最小的方案有 4 种，这就满足了电力系统对方案多样化的要求。从表 2 中可以清楚看出安装 PMU 的节点以及此 PMU 观测的支路。

表3是新英格兰39节点系统在不考虑零注入节点时的优化方案。优化得到 4 种 PMU 数最小的方案，PMU 数为 9。表 3 中仅给出 PMU 的配置方案以及每个 PMU 所需的模拟通道数。没有逐一给出配置模拟通道的支路。

对于 IEEE30 节点系统，考虑零注入节点时，PMU 数最小的优化方案有 12 种，PMU 数为 7，而且每种方案 PMU 模拟通道总数均是 20。由于篇幅有限，这里只给出一种优化方案，如表 4 所示。

表 3 不考虑零注入节点新英格兰 39 节点系统仿真结果

Table 3 New England 39 buses system simulation results without zero-injection buses

方案	PMU 配置节点(第一行)/ PMU 通道数(第二行)									平均通道数
1	3	6	13	16	20	23	29	37	39	2.67
	3	4	3	5	1	2	3	1	2	
2	3	6	13	16	20	23	25	29	39	2.67
	3	4	3	5	1	2	2	2	2	
3	3	6	13	16	23	29	34	37	39	2.67
	3	4	3	5	2	3	1	1	2	
4	3	6	13	16	23	25	29	34	39	2.67
	3	4	3	5	2	2	2	1	2	

表 4 考虑零注入节点 IEEE-30 节点系统仿真结果

Table 4 IEEE-30 bus system simulation results with zero-injection buses

	PMU1	PMU2	PMU3	PMU4	平均通道数
PMU 配置节点	1	7	10	12	2.857
PMU 通道数	2	2	5	5	
安装通道的支路	L1-2 L1-3	L5-7 L6-7	L9-10 L10-17 L10-20 L10-21 L10-22	L4-12 L12-13 L12-14 L12-15 L12-16	
	PMU5	PMU6	PMU7		
PMU 配置节点	19	23	27		
PMU 通道数	1	1	4		
安装通道的支路	L18-19	L23-24	L25-27 L27-28 L27-29 L27-30		

由 IEEE30 节点系统和新英格兰 39 节点系统的仿真结果中可以看出，当系统的节点逐渐增多时，PMU 以及 PMU 模拟通道的配置方案也会增加，这就保证了实际应用中的可选择性。

3　结论

本文对基于0-1整数规划的PMU优化配置方法进行了研究，取得了以下成果。

(1) 建立了基于0-1整数规划的PMU配置模型，并且对模型进行了改进，得到多方案 PMU 配置模型。

(2) 在多方案配置模型的基础上，提出了 PMU 模拟通道数最小化的问题，并给出了处理方法。

本研究通过 Matlab 编程实现对 PMU 配置模型的优化求解，算例的结果表明本研究所提出的改进模型能够更好地满足电力系统的要求，而对模拟通道数最小化问题的处理，使得 PMU 的配置更加经济合理。

参考文献

[1] 顾雪平, 李扬, 吴献吉. 基于局部学习机和细菌群体趋药性算法的电力系统暂态稳定评估[J]. 电工技术学报, 2013, 28(10): 271-279.
GU Xueping, LI Yang, WU Xianji. Transient stability assessment of power systems based on local learning machine and bacterial colony chemotaxis algorithm[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2013, 28(10): 271-279.

[2] 古丽扎提·海拉提, 王杰. 多时滞广域测量电力系统稳定分析与协调控制器设计[J]. 电工技术学报, 2014, 29(2): 279-289.
Gulizhati Hailati, WANG Jie. Multiple time delays analysis and coordinated stability control for power system wide area measurement[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(2): 279-289.

[3] 马兆兴, 李洪美, 万秋兰, 等. 基于动态量测量的电压失稳性判据研究[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(24): 30-35.
MA Zhaoxing, LI Hongmei, WAN Qiulan, et al. Study on voltage instability criterion based on dynamic measurement[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(24): 30-35.

[4] 程云峰, 张欣然, 陆超. 广域测量技术在电力系统中的应用研究进展[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(4): 145-153.
CHENG Yunfeng, ZHANG Xinran, LU Chao. Research

progress of the application of wide area measurement technology in power system[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(4): 145-153.

[5] 沙智明, 郝育黔, 郝玉山, 等. 电力系统 PMU 安装地点选择优化算法的研究[J]. 继电器, 2005, 33(7): 31-36, 58.
SHA Zhiming, HAO Yuqian, HAO Yushan, et al. A new algorithm for PMU placement optimization in power system[J]. Relay, 2005, 33(7): 31-36, 58.

[6] 樊海锋, 徐凯, 江全元, 等. 考虑最大可观测通道数和关键故障线路约束的 PMU 优化配置研究[J]. 机电工程, 2013, 30(10): 1240- 1245.
FAN Haifeng, XU Kai, JIANG Quanyuan, et al. Investigation of optimal PMU placement considering limited number of channels constraints and critical line constraints[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2013, 30(10): 1240-1245.

[7] 李俊刚, 张爱民, 张杭, 等. 广域保护系统数据网络可靠性评估[J]. 电工技术学报, 2015, 30(12): 344-350.
LI Jungang, ZHANG Aimin, ZHANG Hang, et al. Reliability evaluation of the wide area protect system[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2014, 29(2): 279-289.

[8] 徐岩, 郅静. 基于改进自适应遗传算法的 PMU 优化配置[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(2): 55- 62.
XU Yan, ZHI Jing. Optimal PMU configuration based on improved adaptive genetic algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(2): 55-62.

[9] XU Dongjie, HE Renmu, WANG Peng, et al. Comparison of several PMU placement algorithms for state estimation[Z]. 2004.

[10] 韩美玉, 王艳松, 张丽霞. 基于粒子群算法的电力系统非线性谐波状态估计[J]. 电力系统保护与控制, 2013, 41(22): 98-102.
HAN Meiyu, WANG Yansong, ZHANG Lixia. Research on non-linear harmonic state estimation in power system based on particle swarm optimization algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2013, 41(22): 98-102.

[11] 彭疆南, 孙元章, 王海风. 考虑系统完全可观测性的 PMU 最优配置方法[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(4): 10-16.
PENG Jiangnan, SUN Yuanzhang, WANG Haifeng. An optimal PMU placement algorithm for full network observability[J]. Automation of Electric Power Systems, 2003, 27(4): 10-16.

[12] NUQUI R F, PHADKE A G. Phasor measurement unit placement techniques for complete and incomplete observability[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2005, 20(4): 2381-2388.

[13] GOU B. Generalized integer linear programming formulation for optimal PMU placement[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2008, 23(3): 1099-1104.

[14] 牛胜锁, 张思为, 梁志瑞. 变权重蛙跳算法在 PMU 优化配置中的应用[J]. 电力系统及其自动化学报, 2014, 26(7): 51-56.
NIU Shengsuo, ZHANG Siwei, LIANG Zhirui. Application of variable weighting frog leaping algorithm in optimal PMU placement[J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2014, 26(7): 51-56.

[15] GOU B. Optimal placement of PMUs by integer linear programming[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2008, 23(3): 1525-1526.

收稿日期：2015-03-06； 修回日期：2015-06-01

作者简介：

何昆仑(1990-)，男，通信作者，硕士研究生，研究方向为电力系统自动化及电力系统继电保护等；E-mail: hekunlun1990@163.com

张庆超(1956-)，男，副教授，硕士生导师，研究方向为电力系统自动化及电力系统继电保护等；E-mail: qczhang@tju.edu.cn

郑明忠(1989-)，男，硕士，研究方向为电力系统自动化及不对称输电线路等。E-mail: mingzhongz@tju.edu.cn

(编辑 姜新丽)