基于凸组合方法的变时滞电力系统稳定性判据

钱 伟，高 超

（河南理工大学电气工程与自动化学院，河南 焦作 454000）

摘要：在广域环境下，控制信号在传输和处理过程中产生的时滞现象会对电力系统的稳定运行产生难以忽略的负面影响。给出了一种基于凸组合方法的变时滞电力系统稳定性判别方法。构造了一种新的 Lyapunov- Krasovskii 泛函，通过证明其正定性，从而放松了对泛函参数项的约束。使用自由权矩阵和凸组合方法对泛函的导函数进行估计，得到了基于线性矩阵不等式的变时滞电力系统的稳定性判据，降低了现有结论的保守性。通过实例仿真表明，所使用的方法在保守性上优于现存的一些方法。

关键词：凸组合；变时滞；电力系统；L-K 泛函；稳定性判据

A stability criterion for power system with time-varying delay based on convex combination

QIAN Wei, GAO Chao

(Dept of Electrical Engineering and Automation, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

Abstract: In the wide-area environment, the time-delay of control signal generated in the process of transmission and treatment will produce a negative effects that can not be neglected for the stable operation of power system. A stability criterion for power system with time-varying delay based on the method of convex combination is presented. Firstly, through constructing a new type of Lyapunov-Krasovskii functional and proving its positive definiteness, the parameter constraint is relaxed. Secondly, using slack matrices and a convex combination method, the time-varying delay stability criterion, which is less conservative, is derived in terms of linear matrix inequalities. Finally, simulation results indicate that the presented method reduces the conservatism of some existing results.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 61104119) and Program for Science & Technology Innovation Talents in Universities of Henan Province (No.13HASTIT044).

Key words: convex combination; time-varying delay; power system; L-K functional; stability criterion

中图分类号： TM712 文章编号： 1674-3415(2015)19-0037-06

0 引言

随着广域测量技术在电力系统控制中的广泛应用[1-2]，其动态过程也变得越来越复杂。在广域环境下，控制信号在传输过程中的延时非常明显[3-4]，这将会对电力系统的稳定运行产生难以忽略的负面影响。因此研究时滞电力系统稳定性判据具有十分重要的意义[5]。

目前，已有许多文献对这一问题进行了深入的研究，这些研究方法可分为时域仿真法、频域法、直接法。采用时域仿真法需要确切知道待研究系统的模型和参数，但在实际电力系统中，很多时滞环节的模型复杂，在很多情况下难以实现。频域法主要是对系统的特征方程进行变换，通过求解特征值的分布来判断系统的稳定。如文献[6]利用 Rekasius 变换，将时滞系统的特征方程由一个超越方程变成一个普通多项式。文献[7]利用 Pade 近似有理多项式来逼近时滞环节，给出了一种计算时滞电力系统部分特征值的方法,但频域方法往往计算量过大,实际应用中具有很强的局限性。相比而言，根据电力系统结构的特点,基于 Lyapunov 稳定性理论的直接法具有更强的实用性，但该方法同时具有一定的保守性，如何降低保守性成为这一领域研究的热点。文献[8]通过构造一种 Lyapunov-Krasovskii 泛函，在导函中引入一些松散项，在一定程度上降低了结

基金项目：国家自然科学基金项目(61104119)；河南省高校科技创新人才支持计划(13HASTIT044)

论的保守性。文献[9]在文献[8]的基础上，利用 schur 补定理，通过对系统中不确定项进行变换，得到了不确定时滞系统稳定性判据。文献[10]构造了一种新的 L-K 泛函，在导函数引入一些松散项，并利用广义特征值方法求解出了电力系统时滞稳定上限。上述方法均采用在导函数中引入松散项来降低判据的保守性。但是，由于泛函的构造和解析方法相对简单，并且未考虑对泛函本身参数进行放松，造成结论具有一定的保守性。

基于以上分析，本文进一步研究了如何降低判据保守性的方法，首先，结合电力系统的特点，构造了一种新的 Lyapunov - Krasovskii 泛函，通过证明其正定性，放松了对泛函参数项的约束；然后，使用自由权矩阵和凸组合方法对泛函的导函数进行估计，得到了基于线性矩阵不等式的变时滞稳定性判据，降低了现有结论的保守性；最后通过仿真算例验证了该判据在在保守性上优于现存的一些结果。

1 时滞电力系统模型

本文将电力系统模型考虑为如下四阶微分方程，并考虑发电机端电压测量值存在一个时变的延时，则系统方程可表示为[6]

$$\begin{cases}\dot{\delta}=\omega_{\mathrm{B}}\omega\\ \dot{\omega}=\dfrac{1}{M}\{-D\omega+(P_{\mathrm{m}}-P_{\mathrm{G}})\}\\ \dot{E}'=\dfrac{1}{T'_{\mathrm{d0}}}\{-E'-(x_{\mathrm{d}}-x'_{\mathrm{d}})I_{\mathrm{d}}+E_{\mathrm{fd}}\}\\ \dot{E}_{\mathrm{fd}}=\dfrac{1}{T_{\mathrm{A}}}\{-K_{\mathrm{A}}(V_{\mathrm{G}}(t-\mathrm{d}(t))-V_{\mathrm{ref}})-(E_{\mathrm{fd}}-E_{\mathrm{fd0}})\}\end{cases} \tag{1}$$

式中：

$$P_{\mathrm{G}}=\frac{E'V_0\sin\delta}{x_{\mathrm{e}}+x'_{\mathrm{d}}}\qquad I_{\mathrm{d}}=\frac{E'-V_0\cos\delta}{x_{\mathrm{e}}+x'_{\mathrm{d}}}$$

$$V_{\mathrm{G}}=\frac{\sqrt{(x'_{\mathrm{d}}+x_{\mathrm{e}}E'\cos\delta)^2+(x_{\mathrm{e}}E'\sin\delta)^2}}{x_{\mathrm{e}}+x'_{\mathrm{d}}}$$

各参数代表意义详见文献[6]。将式(1)线性化，可得如下状态空间模型。

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-d(t))\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\quad t\in[-h,0]\end{cases} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\Delta\delta & \Delta\omega & \Delta E' & \Delta E_{fd}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为电力系统状态变量；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为 $[-h,0]$ 上连续的初始相量函数。式(2)中时滞 $d(t)$ 满足如下条件：

$$0\le d(t)\le h,\dot{d}(t)\le\mu \tag{3}$$

本文基于泛函 Lyapunov-Krasovskii 理论，给出了时滞系统(2)的稳定性判据，为得到本文的主要结论，需要应用以下引理。

引理 1[11] 对于任意的实对称矩阵 $\boldsymbol{M}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{M}\ge 0$ 和标量 α、β 且 $\alpha>\beta$ 及相量值函数 $\omega:[\beta,\alpha]\to\boldsymbol{R}^n$，使得下面积分有定义，则有下述矩阵不等式成立：

$$\begin{aligned}&\left(\int_\beta^\alpha\omega(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\left(\int_\beta^\alpha\omega(s)\mathrm{d}s\right)\le\\ &(\alpha-\beta)\int_\beta^\alpha\omega^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{M}\omega(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4}$$

2 变时滞依赖型稳定判据

构造如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函。

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t),t)=\sum_{i=1}^{6}\boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{x}(t),t) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}(t) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}_t)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

$$\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{x}_t)=\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2x(s)\mathrm{d}s \tag{8}$$

$$\boldsymbol{V}_4(x_t)=h\int_{t-h}^{t}(s-t+h)^3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

$$\boldsymbol{V}_5(\boldsymbol{x}_t)=\int_{t-h}^{t}\int_{s}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(u)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(u)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{W}_1\\ * & \boldsymbol{T}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(u)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(u)\end{bmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}s \tag{10}$$

$$\boldsymbol{V}_6(\boldsymbol{x}_t)=\int_{t-h}^{t}\int_{s}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(u)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(u)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{W}_2\\ * & \boldsymbol{T}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(u)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(u)\end{bmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}s \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{P}_{ij}](1\le i\le j\le 3)$。

由引理 1 可知

$$\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}_t)\ge h^{-1}\left(\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\left(\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right) \tag{12}$$

结合式(6)~式(12)可知，若下列不等式成立：

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{13}\\ * & \boldsymbol{P}_{22}+h^{-1}\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{P}_{23}\\ * & * & \boldsymbol{P}_{33}\end{bmatrix}>0,\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{W}_1\\ * & \boldsymbol{T}_1\end{bmatrix}>0\\ &\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{W}_2\\ * & \boldsymbol{T}_2\end{bmatrix}>0,\boldsymbol{R}_1>0,\boldsymbol{R}_2>0,\boldsymbol{H}>0\end{aligned} \tag{13}$$

则泛函式(5)为正定。

注 1 应用引理 1，将矩阵 $\boldsymbol{R}_1$ 引入矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中，进而放松了对参数 $\boldsymbol{P}_{22}$ 的约束，从而有利于降低结论的保守性。

然后，对式(5)沿系统解轨迹求导，为方便讨论，这里设定两个变量，令

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad\left(\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(\int_{t-h}^{t}(s-t+h)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\right]$$

$$\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)=\left[\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\right]$$

首先对$\boldsymbol{V}_1(x_t)$求导可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(x_t)=2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t)}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-h(t))\\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)\\ h\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\end{bmatrix}=\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\left[\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}_2+\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}_1\right]\boldsymbol{\chi}(t)\tag{14}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Gamma}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&0&0&0&0\\0&\boldsymbol{I}&0&0&0\\0&0&\boldsymbol{I}&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&0&0&\boldsymbol{A}_1&0\\I&0&0&0&-\boldsymbol{I}\\h\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{I}&0&0&0\end{bmatrix}$$

接着对$\sum_{i=2}^{4}\boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{x}_t)$求导可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{4}\dot{\boldsymbol{V}}_i(\boldsymbol{x}_t)\le{}&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(t-h)+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{x}(t)-\\&(1-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{x}(t-h(t))+\\&h^4\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)-\\&3\left(\int_{t-h}^{t}(s-t+h)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\times\\&\boldsymbol{H}\left(\int_{t-h}^{t}(s-t+h)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)=\\&\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{\chi}(t)\end{aligned}\tag{15}$$

式中

$$\boldsymbol{\Omega}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2+h^4\boldsymbol{H}&0&0&0&0\\*&0&0&0&0\\*&*&-3\boldsymbol{H}&0&0\\*&*&*&-(1-\mu)\boldsymbol{R}_2&0\\*&*&*&*&-\boldsymbol{R}_1\end{bmatrix}$$

然后对$\boldsymbol{V}_5(\boldsymbol{x}_t)$和$\boldsymbol{V}_6(\boldsymbol{x}_t)$求导可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}_5(\boldsymbol{x}_t)=h\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{\chi}(t)-\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\\dot{\boldsymbol{x}}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1&\boldsymbol{W}_1\\*&\boldsymbol{T}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\\dot{\boldsymbol{x}}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\tag{16}$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}_6(\boldsymbol{x}_t)\le h(t)\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}_3\boldsymbol{\chi}(t)-(1-\mu)\int_{t-h(t)}^{t}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\\dot{\boldsymbol{x}}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_2&\boldsymbol{W}_2\\*&\boldsymbol{T}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\\dot{\boldsymbol{x}}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\tag{17}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Omega}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}&0&0&\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}_1&0\\*&0&0&0&0\\*&*&0&0&0\\*&*&*&\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}_1&0\\*&*&*&*&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A}&0&0&\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A}_1&0\\*&0&0&0&0\\*&*&0&0&0\\*&*&*&\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A}_1&0\\*&*&*&*&0\end{bmatrix}$$

因此，结合式(14)~式(17)可知，存在适当维数的矩阵$\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$使得下式成立：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}_t)\le{}&\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\left[\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}_2+\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}_1+\boldsymbol{\Omega}_1+h\boldsymbol{\Omega}_2+\right.\\&\left.h(t)(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Omega}_3)+(h-h(t)\boldsymbol{Y})\right]\boldsymbol{\chi}(t)-\\&2\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\\&2\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}\int_{t-h(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s+\\&2\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{N}\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\\&\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t,s)\mathrm{d}s-\\&\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\eta}(t,s)\mathrm{d}s=\\&\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t)\left[\boldsymbol{\Pi}+h\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{\gamma}_1+\right.\\&h(t)(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{\gamma}_2)+\\&\left.(h-h(t))\boldsymbol{Y}\right]\boldsymbol{\chi}(t)-\\&\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t,s)\mathrm{d}s-\end{aligned}$$

$$\int_{t-h}^{t-h(t)} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\eta}(t,s)\mathrm{d}s \tag{18}$$

其中：

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t,s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\chi}^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_5^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}_5^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_5^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

上式中 $h(t)(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{\gamma}_2)+(h-h(t))\boldsymbol{Y}$ 是矩阵 $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{-1}\boldsymbol{\gamma}_2)$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 关于 $h(t)$ 的凸组合项，它可以等价为两种边界情况：$h(t)=h$ 和 $h(t)=0$，通过 *schur* 补定理可得如下定理。

注 2：现有文献大多在引入自由矩阵的基础上对泛函导数进行放缩，从而导致结论具有一定的保守性。本文在引入自由矩阵的同时，采用了凸组合方法，利用边界条件对泛函的导数进行无保守性处理，避免了对泛函导数的进一步放缩，因此，在保证充分性的同时进一步降低了判据的保守性。

定理 1　对给定标量 $h>0$，如果存在矩阵 $\boldsymbol{R}_1>0$，$\boldsymbol{R}_2>0$，$\boldsymbol{H}>0$，$\boldsymbol{P}_{ij}(1\le i\le j\le 3)$，$\boldsymbol{S}_i$，$\boldsymbol{W}_i$，$\boldsymbol{T}_i(i=1,2)$ 满足式(16)和任意矩阵 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{L}$ $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{N}$，使下列不等式成立，则时滞系统(2)是渐近稳定的。

$$\boldsymbol{\Xi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}+h(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Omega}) & h(\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2)^{\mathrm{T}}\\ * & -h(\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2)\end{bmatrix}<0 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}+h\boldsymbol{Y} & h\boldsymbol{\gamma}_1^{\mathrm{T}}\\ * & -h\boldsymbol{T}_1\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{M}\\ * & \boldsymbol{S}_1+(1-\mu)\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{W}_1+(1-\mu)\boldsymbol{W}_2\\ * & * & \boldsymbol{T}_1+(1-\mu)\boldsymbol{T}_2\end{bmatrix}\ge 0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y} & -\boldsymbol{L} & \boldsymbol{N}\\ * & \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{W}_1\\ * & * & \boldsymbol{T}_1\end{bmatrix}\ge 0 \tag{22}$$

式中：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=[\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}\quad 0\quad 0\quad \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}_1\quad 0]$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=[\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A}\quad 0\quad 0\quad \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{A}_1\quad 0]$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{A} & 0 & 0 & \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{A}_1 & 0\\ * & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & 0 & 0\\ * & * & * & * & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{X}_{ij}](1\le i\le j\le 5)$$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{Y}_{ij}](1\le i\le j\le 5)$$

$$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{\Pi}_{ij}](1\le i\le j\le 5)$$

其中：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}_{11}&=\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{11}+\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}+\\&\quad h(\boldsymbol{P}_{13}+\boldsymbol{P}_{13}{}^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2+h^4\boldsymbol{H}+\\&\quad h(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_1{}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A})+\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{12}&=-\boldsymbol{P}_{13}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_{22}+h\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{13}&=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{13}+\boldsymbol{P}_{23}+h\boldsymbol{P}_{33}+\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{14}&=\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{A}_1+h\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{M}_4^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_{15}&=-\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{M}_5^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_{22}&=-\boldsymbol{P}_{23}-\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{23}&=-\boldsymbol{P}_{33}+\boldsymbol{L}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{24}&=\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{L}_4^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{\Pi}_{25}&=-\boldsymbol{P}_{22}+\boldsymbol{L}_5^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_2\\ \boldsymbol{\Pi}_{33}&=-3\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{\Pi}_{34}&=\boldsymbol{P}_{13}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{M}_3+\boldsymbol{N}_3\\ \boldsymbol{\Pi}_{35}&=-\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_3\\ \boldsymbol{\Pi}_{44}&=-(1-\mu)\boldsymbol{R}_2+\boldsymbol{N}_4+\boldsymbol{N}_4^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_4-\boldsymbol{M}_4^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\Pi}_{45}&=\boldsymbol{N}_5^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{M}_5^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_4\\ \boldsymbol{\Pi}_{55}&=-\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{N}_5-\boldsymbol{N}_5^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

3　仿真分析

3.1 典型 2 阶时滞系统算例

首先采用一个 2 阶典型时滞系统[12-15]进行分析，将本文方法得到结论与其他文献进行比较，其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

表 1 给出了相关文献对 2 阶时滞系统的计算结果。可以看出，采用本文的方法得到的时滞上界均高于其他文献，说明该方法在典型 2 阶时滞系统中具有更小的保守性。

表 1 不同方法求得的最大时滞上界

Table 1 Maximal h comparison with different methods

μ	0	0.1	0.5	0.9	3
文献[12]	4.472	3.604	2.008	1.180	—
文献[13]	4.472	3.604	2.008	1.180	0.999
文献[14]	4.472	3.612	2.008	1.183	0.999
文献[15]	4.472	3.669	2.337	1.873	1.868
本文方法	4.606	3.703	2.337	1.873	1.868

3.2 单机无穷大系统算例

为了验证本文方法在电力系统上的有效性，采

用图1所示的单机无穷大系统[6]进行算例分析。

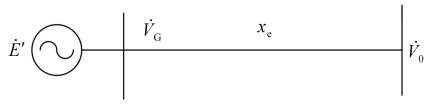

图 1 单机无穷大系统结构

Fig. 1 Single-machine infinite-bus system

文献[6]给出了单机无穷大时滞电力系统的矩阵参数，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_1$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 376.9911 & 0 & 0 \\ -0.0963 & -0.5000 & -0.0801 & 0 \\ -0.0480 & 0 & -0.1661 & 0.1000 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 38.0187 & 0 & -95.2560 & 0 \end{bmatrix}$$

从表 2 可以看出，在求解单机无穷大时滞电力系统的稳定区间时，利用本文方法求得的系统时滞上界均大于文献[9]和文献[16]所用的方法。说明本文方法在单机系统测试中，判据在保守性上相对其他文献方法明显降低。

表 2 不同方法求得的最大时滞上界

Table 2 Maximal h comparison with different methods

方法	文献[9]	文献[16]	本文方法
h/s	0.065 4	0.065 3	0.112

3.3 IEEE 4 机 11 节点系统算例

为验证本文方法在多机电力系统中的有效性，采用图 2 所示的四机系统[10]进行算例分析。

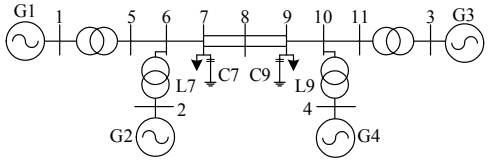

图 2 四机两区域系统

Fig. 2 Four-generator two-area test system

文献[10]通过模态分析法得到了四机电力系统状态矩阵，并对矩阵进行降阶，降阶后的状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和时滞矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 376.9 \\ -0.073 & 0.065 & 0.004 & -0.730 & 0.272 & 0.076 \\ 0.058 & -0.087 & 0.009 & 1.160 & -0.343 & -0.134 \\ 0.008 & 0.011 & -0.082 & -0.020 & 0.047 & -0.554 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.234 & -0.839 & 0.010 \\ 0 & -0.0011 & 0.0010 & -0.348 & -1.362 & -0.138 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0.049 & -0.290 & -0.638 \end{bmatrix}$$

由表 3 可以看出，在四机测试系统中，利用本文的方法求得的系统时滞上界均大于其他文献的方法，进一步证明了本文方法具有更小的保守性。

表 3 不同方法求得的最大时滞上界

Table 3 Maximal h comparison with different methods

方法	文献[16]	文献[10]	文献[17]	本文方法
h/s	0.328	0.288	0.376	0.654

4 结语

本文进一步研究了时滞电力系统稳定性判据，通过构造一种新的 Lyapunov - Krasovskii 泛函，然后求解该泛函沿系统轨迹的导函数，并在导函数引入了自由权矩阵和一个凸组合项得到了基于线性矩阵不等式的变时滞电力系统稳定性判据；最后通过仿真算例说明了该判据在保守性上优于现存的一些结果。由于在定理的推导过程中，引入了自由权矩阵，这不可避免地增加了变量个数，使运算的效率降低，今后的研究应考虑克服这些缺点。

参考文献

[1] 程云峰, 张欣然, 陆超. 广域测量技术在电力系统中的应用研究进展[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(4): 145-153.
CHENG Yunfeng, ZHANG Xinran, LU Chao. Research progress of the application of wide area measurement technology in power system[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(4): 145-153.

[2] 黄弘扬, 徐政, 花文, 等. 基于广域测量系统的发电机强励磁控制方案[J]. 电力系统保护与控制, 2013, 41(6): 49-56.
HUANG Hongyang, XU Zheng, HUA Wen, et al. Forced excitation control scheme based on wide-area measurement system[J]. Power System Protection and Control, 2013, 41(6): 49-56.

[3] 江全元, 邹振宇, 曹一家, 等. 考虑时滞影响电力系统稳定分析和广域控制研究进展[J]. 电力系统自动化, 2005, 29(3): 1-7.
JIANG Quanyuan, ZOU Zhenyu, CAO Yijia, et al. Overview of power system stability analysis and wide-area control in consideration of time delay[J].

Automation of Electric Power Systems, 2005, 29(3): 1-7.

[4] 石颉, 刘韬. 基于测度理论的广域电力系统反馈信号最大允许时延分析[J]. 电力系统保护与控制, 2008, 36(12): 8-11.
SHI Jie, LIU Tao. Analysis of the maximal delay of remote signal for wide-area power system based on the theory of measure[J]. Power System Protection and Control, 2008, 36(12): 8-11.

[5] WU Hongxia, TSAKLIS K S, HEYDT G T. Evaluation of time delay effects to wide-area power system stabilizer design[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2004, 19(4): 1935-1941.

[6] 贾宏杰, 尚蕊, 张宝贵. 电力系统时滞稳定裕度求解方法[J]. 电力系统自动化, 2007, 31(2): 5-11.
JIA Hongjie, SHANG Rui, ZHAGN Baogui. Compuation of delay stability margin of electric power systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 2007, 31(2): 5-11.

[7] 叶华, 霍健, 刘玉田. 基于 Pade 近似的时滞电力系统特征值计算方法[J]. 电力系统自动化, 2013, 37(7): 25-30.
YE Hua, HUO Jian, LIU Yutian. A method for computing eigenvalue of time-delay power system based on Pade approximation[J]. Automation of Electric Power Systems, 2013, 37(7): 25-30.

[8] 贾宏杰, 安海云, 余晓丹. 电力系统改进时滞依赖型鲁棒稳定判据[J]. 电力系统自动化, 2008, 32(19): 15-19.
JIA Hongjie, AN Haiyun, YU Xiaodan. An improved delay-dependent stability criteria for power system with multiple time delays[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32(19): 15-19.

[9] 贾宏杰, 安海云, 余晓丹. 电力系统时滞依赖型鲁棒稳定判据及其应用[J]. 电力系统自动化, 2010, 34(3): 6-11.
JIA Hongjie, AN Haiyun, YU Xiaodan. A delay-dependent robust stability criterion for power system and its application[J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(3): 6-11.

[10] 马静, 李俊臣, 李益楠, 等. 基于改进自由权矩阵与广义特征值的时滞稳定上限计算方法研究[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(18): 1-8.
MA Jing, LI Junchen, LI Yinan, et al. Research on time-delay upper-bound of power system wide-area damping controllers based on improved free-weighting matrices and generalized eigenvalue problem[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(18): 1-8.

[11] GU K. Discretized LMI set in the stability problem of linear uncertain time-delay systems[J]. International Journal of Control, 1997, 68(4): 923-934.

[12] WU M, HE Y, SHE J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Autoatica, 2004, 40(8): 1435-1439.

[13] LIEN C H. Delay-dependent stability criteria for uncertain neutral systems with multiple time-varying delays via LMI approach[J]. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 2005, 148(6): 442-447.

[14] HE Y, WU M, SHE J H, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(8): 1435-1439.

[15] PARK P, JEONG W. Stability and robust stability for systems with a time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(10): 1855-1858.

[16] 吴敏, 何勇. 时滞系统鲁棒控制 —— 自由矩阵方法[M].北京: 科学出版社, 2007.

[17] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

收稿日期：2014-12-24； 修回日期：2015-03-30

作者简介：

钱 伟(1978-)，男，副教授，主要研究领域为鲁棒控制、智能控制等方面的研究；E-mail: qwei@hpu.edu.cn

高 超(1988-)，男，硕士研究生，主要从事电力系统稳定与控制方面的研究。

(编辑 周金梅)