考虑频率变化的基于 DFT 单相数字锁相环的椭圆拟合方法

杜佳玮，杨 鹏，史旺旺

（扬州大学水利与能源动力工程学院，江苏 扬州 225127）

摘要：针对传统的 DFT 单相锁相环在电网频率发生变化时存在锁相性能变差问题，提出了一种考虑频率变化的基于 DFT 单相数字锁相环的椭圆拟合方法。采用带遗忘因子的递推最小二乘法进行椭圆拟合辨识出椭圆参数，再由锁相环产生正、余弦输出，实现了基于虚拟两相正交电压矢量的单相数字锁相环控制。通过 Matlab 对电网电压的频率波动、相位突变以及谐波注入等参数变化的影响进行了仿真。最后，通过实验结果验证了该方法的有效性，具有较好的稳态性能和动态特性。

关键词：DFT；数字锁相环；递推最小二乘法；椭圆拟合

A novel single-phase digital phase-locked loop based on DFT considering frequency variation

DU Jiawei, YANG Peng, SHI Wangwang

(School of Hydraulic, Energy and Power Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China)

Abstract: When the grid frequency is varied, the traditional single-phase Phase-locked Loop (PLL) using DFT becomes dissatisfactory. To solve the problems an approach is proposed where ellipse fitting algorithm is incorporated a single-phase Digital Phase-locked Loop (DPLL) based on DFT considering frequency variation. Recursive least square method with forgetting factor is adopted to fit and identify the ellipse parameters, and sine and cosine signals are generated and output by phase-locked loop, then a DPLL on the basis of two-phase orthogonal voltage vector for single-phase digital phase-locked loop is implemented. The influence of parameter variations of the grid voltage including frequency fluctuation, phase mutation and harmonic injection is simulated by MATLAB. Finally, the experimental results verify that the approach is feasible and has better steady-state performance and dynamic characteristics.

Key words: DFT; digital phase-locked loop; recursive least square method; ellipse fitting

中图分类号： TM911.8 文献标识码：A 文章编号： 1674-3415(2015)10-0085-06

0 引言

伴随着各种新能源的出现，利用新能源实现并网发电的技术得到大力推广和使用，其中单相并网逆变器尤为引人注目。逆变器并网发电需要实时跟踪电网的相位，相位的跟踪精度越高，对电网的瞬间冲击越小，逆变器的输出越稳定[1]，这要求采用锁相环对电网电压进行锁相。在实际应用中，常常要求单相逆变器能适应非理想电网环境的运行，这对相应的锁相环提出了更高的要求。可见锁相环(PLL)技术已成为单相逆变器并网技术的核心技术之一。

对于单相系统，通过检测电压过零点可以得到系统相位信息，但是在两个检测点之间若频率发生变化，则无法实现快速跟踪相位变化[2-3]，不适合谐波和噪声大的场合。文献[4]利用类似乘法鉴相器方法，除生成相位差信号外，会伴随二倍频分量的产生，采用低通滤波器滤波造成较大控制延时，动态响应速度慢。文献[5-7]采用基于 DFT 的周期控制方法，利用 DFT 提取基波相位和幅值，同时容易滤除高频分量，但此方法计算量大，且当频率变化时无法完成锁相。文献[8]采用了基于 FIR 滤波器的方法，借鉴三相锁相环原理，构造虚拟两相正交变量，依赖 FIR 滤波器系数，随着滤波器阶数的升高，运算时间变长，且不适合频率变化较大的场合。

本文引入一种新的控制方法，利用 DFT 能滤除除基波以外的各次谐波，同时将基波信号分解成一对正交信号的特点，通过在电网频率发生变化时，

基金项目：江苏省高校自然科学研究项目资助（14KJB470010）

构造的虚拟两相电压矢量在平面中的轨迹是一个椭圆的事实，提出了基于椭圆拟合[9-12]的数字锁相环方法。该方法利用递推最小二乘法椭圆拟合方法获得椭圆的参数，再由锁相环产生正、余弦输出。本文推导了锁相环输出和椭圆参数的关系，设计了带遗忘因子的递推最小二乘法，最后给出了实验结果。

1　DFT 算法

离散傅里叶变换(DFT)广泛应用于数字信号处理领域。通过 DFT 能很容易提取输入信号中的基波信息，包括基波幅值和相位，并且能够滤除其他谐波分量，显然，DFT 算法起到了带通滤波的效果。同时，利用 DFT 能够将提取出来的基波信号分解成一对相位严格互差 90°的正交矢量。

对于离散傅里叶变换(DFT)，有[13-15]

$$U_x=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e(n)\cos(n\frac{2\pi}{N}) \tag{1}$$

$$U_y=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e(n)\sin(n\frac{2\pi}{N}) \tag{2}$$

虽然 DFT 能滤除各次谐波，频率在 50 Hz 左右变化时，U_x 和 U_y 变化不明显，锁相效果较好，但当频率发生较大变化时，U_x 和 U_y 变化幅度较大，DFT 算法存在误差，锁相性能变差。

图 1 所示为经 DFT 提取基波的两相正交矢量的幅频特性曲线，其中，图 1(a)为余弦分量的幅频特性，图 1(b)为正弦分量的幅频特性。由图可知，当输入信号频率为 50 Hz 工频时，正交矢量的幅度响应都为 1；当频率变化时，两相正交矢量的相位依然严格保持相差 90°，但幅值明显发生了变化，且变化程度不同。

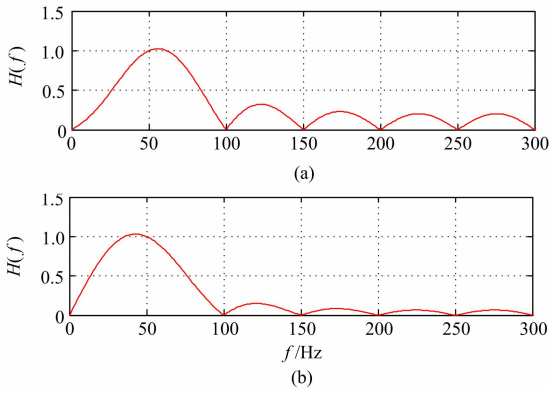

图 1 DFT 幅频特性曲线

Fig. 1 Amplitude-frequency characteristic curves of DFT

由此说明，当电网电压的频率发生变化时，DFT 输出的两相正交电压矢量的幅值对应发生变化。因此，本文提出一种椭圆拟合的方法，来实时跟踪由频率变化引起的幅值变化，从而保证锁相环的锁相效果。

2　单相数字锁相环设计

基于两相正交变量的方法主要产生与原信号相差 90°相位的信号。由于单相系统只有一个输入变量，因此必须构造一个能与原信号组成正交信号的变量。本文利用 DFT 能滤除除基波以外的各次谐波，同时将基波信号分解成一对正交信号的特点，设计了如图 2 所示的基于椭圆拟合的单相数字锁相环系统。

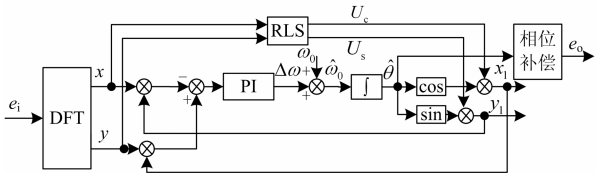

图 2 基于椭圆拟合的锁相环框图

Fig. 2 Block diagram of DPLL based on ellipse fitting

由式(1)和式(2)可得，输入电压信号 e_i 经过 DFT 产生一组正交信号，获得在 $\alpha\beta$ 坐标系下输入电压信号的正、余弦分量：

$$\begin{pmatrix}U_\alpha\\U_\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_c\cos(\omega_0t+\varphi_0)\\U_s\sin(\omega_0t+\varphi_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_c\cos(\theta_0)\\U_s\sin(\theta_0)\end{pmatrix} \tag{3}$$

式中，θ_0、ω_0、φ_0 分别为 $\alpha\beta$ 坐标系下电网电压的相位角、频率和初相位。

当频率为 50 Hz 时，电压信号的正、余弦分量在平面上的轨迹为圆，此时 U_c 和 U_s 相等。当电网电压发生变化时，U_c 和 U_s 一般不相等，在平面上的轨迹为一个椭圆，定义此时电压方程为

$$\begin{cases}x=U_c\cos(\theta_0)\\y=U_s\sin(\theta_0)\end{cases} \tag{4}$$

式中：x 为 α 轴分量；y 为 β 轴分量。

由于 x、y 是 DFT 输出，因此，x、y 相位严格相差 90°、幅值 U_c 和 U_s 的变化体现电网电压变化，且不含除基波以外的各次谐波。将式(4)进行消参合并，得到关于 x、y 的椭圆方程：

$$\frac{1}{U_c^2}x^2+\frac{1}{U_s^2}y^2=1 \tag{5}$$

令 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{U_c^2}\\b=\dfrac{1}{U_s^2}\end{cases}$，则得到中心点位于坐标原点的标准椭圆方程：

$$ax^2+by^2=1 \tag{6}$$

当通过辨识获得椭圆参数 a、b 后，容易求得 U_c 和 U_s。

锁相环中鉴相器的作用是相位比较，把输出信号和输入参考信号的相位进行比较，产生两个信号的相位差。

设锁相环 α 轴的输出分量为 x_1，β 轴的输出分量为 y_1，则

$$\begin{cases} x_1 = U_c \cos(\hat{\theta}) \\ y_1 = U_s \sin(\hat{\theta}) \end{cases} \tag{7}$$

式中，$\hat{\theta}$ 为锁相环输出相位角。

于是，鉴相器数学模型为

$$yx_1 - xy_1 = U_c U_s(\sin(\theta_0)\cos(\hat{\theta}) - \cos(\theta_0)\sin(\hat{\theta})) = U_c U_s \sin(\theta_0 - \hat{\theta}) \tag{8}$$

式中，$\theta_0 = \omega_0 t + \varphi_0$ 为锁相环输入相位。由式(8)可知，如果让锁相环输出含有辨识幅值的两相正交信号，鉴相器输出中不存在两倍频分量。

由于对输入信号进行滤波，带来了延时，因此，在完成锁相环控制后需要进行相位补偿。由于采用的 DFT 算法具有线性相位滤波器的特性，延时时间固定，相位和频率之间呈线性关系，容易实现相位补偿。

若输入信号角频率为 ω_i，当锁相环进入稳态时，$\omega_i \approx \hat{\omega}_0$，则输出信号 e_o 需要补偿的相位 $\Delta\varphi = \hat{\omega}_0 \Delta T$，$\Delta T$ 为 DFT 滤波对应 ω_i 的延时时间。

3　递推最小二乘法椭圆拟合

最小二乘法椭圆拟合是一种广泛应用的参数辨识方法，在工程上比较容易实现，而且最小二乘法最突出的优点是其鲁棒性较强。最小二乘法是在随机误差为正态分布时，由最大似然法推出的一个最优估计技术，可使测量误差的平方和最小，递推算法的基本原理是：新的估计值=老的估计值+修正项。

由式(6)可知，椭圆方程存在两个未知参数，因此测量点数 n 应大于等于 2。设 L 个测量点为 x_i、y_i，应满足式(6)，用矩阵表示为

$$\boldsymbol{Z}_L = \boldsymbol{H}_L \boldsymbol{\mu} \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{Z}_L = [1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\mu} = [a,b]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{H}_L = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 \\ x_2^2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ x_L^2 & y_L^2 \end{bmatrix}$。

理论上，随着被处理的数据增加，此法所得结果将越来越精确。但在实际应用中，由于递推算法由计算机完成，每步都有取舍误差，因此，经常发现误差量变得越来越大，新的采样值已不再对估计值起修正作用，产生“数据饱和”现象。

为了在最大程度上减少“数据饱和”现象的产生，并且能够动态跟踪时变的椭圆参数，减少实时计算工作量，本文采用了带遗忘因子的递推最小二乘法。该方法的思想是：使用遗忘因子对历史数据进行加权，人为加强当前数据的影响。

定义 $R_L = (\boldsymbol{H}_L^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}_L)^{-1}$，$G_{L+1} = \dfrac{R_L h_{L+1}}{\lambda + h_{L+1}^{\mathrm{T}} R_L h_{L+1}}$，

$R_{L+1} = \dfrac{1}{\lambda}(I - R_L \dfrac{h_{L+1} h_{L+1}^{\mathrm{T}}}{\lambda + h_{L+1}^{\mathrm{T}} R_L h_{L+1}}) R_L$，式中 λ 即为遗忘因子，并且 0< λ <1。则椭圆参数递推式为

$$\mu_{L+1} = \mu_L + G_{L+1}(Z_{L+1} - h_{L+1}^{\mathrm{T}} \mu_L) \tag{10}$$

对遗忘因子 λ 大小的选择，往往考虑两点：(1)对递推算法估计椭圆参数的响应速度；(2)对电网谐波的敏感程度。λ 越小，递推算法的响应速度越快，但对谐波越敏感；反之，λ 越大，估计椭圆参数的速度将变慢，但对谐波不敏感。因此，只有准确地选取遗忘因子，才能使整个算法对锁相环的性能保持最优。

4　仿真研究

为了验证上述所提出的单相数字锁相环的有效性，在理论分析的基础上，使用 Matlab 进行了仿真。取电网电压频率 50 Hz，采样频率 5 kHz，遗忘因子 0.95。

4.1　电网电压频率变化仿真

本文设计的单相数字锁相环适合频率变化大的场合。图 3 是采用传统 DFT 算法频率在 0.1 s 时由 50 Hz 突变为 60 Hz 的仿真结果图，图 4 是采用椭圆拟合算法频率在 0.1 s 时由 40 Hz 突变为 60 Hz 的仿真结果，图 5 为 60 Hz 时的电压轨迹图。由仿真结果可以看出，使用传统 DFT 算法设计的锁相环，只在工频 50 Hz 左右具有较好的锁相效果，不适合频率大范围变化的场合；而采用椭圆拟合算法设计的锁相环则能够快速完成锁相，即使在调节过程中依然能够保持对相位的跟踪。图 4 表明，60 Hz 时的电压轨迹为椭圆，符合椭圆拟合算法的理论分析结果。

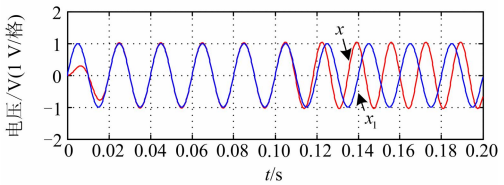

图 3 传统 DFT 锁相环仿真结果

Fig. 3 Simulation result for traditional DPLL based on DFT

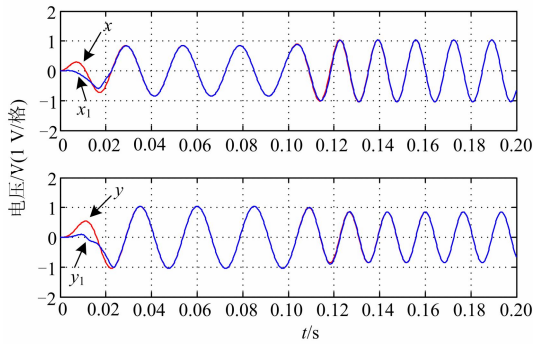

图 4 电网电压频率突变时的仿真波形

Fig. 4 Simulation waveform for frequency mutation of grid voltage

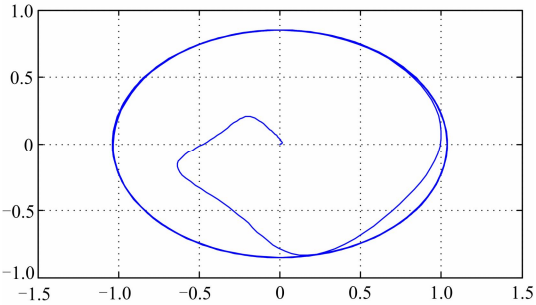

图 5 60 Hz 时的电压轨迹图

Fig. 5 Path of input voltage with frequency of 60 Hz

4.2 电网电压相位突变仿真

设置电网电压相位在 0.1 s 时突然提前 π/3，此时锁相环波形如图 6 所示，可见锁相环在一个周期内完成相位的重新锁定，具有较好的动态特性。

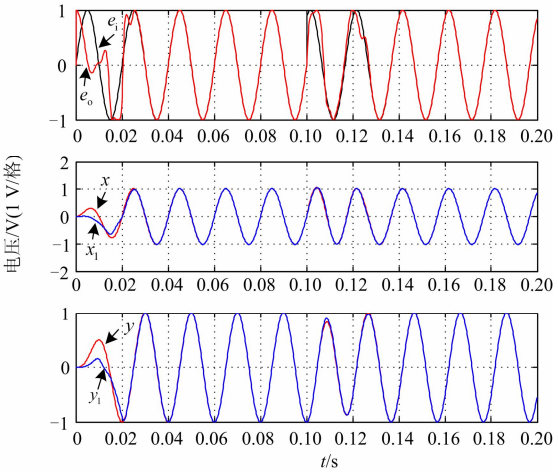

图 6 电网电压相位突变时的仿真波形

Fig. 6 Simulation waveform for phase mutation of grid voltage

4.3 电网电压有谐波注入仿真

在输入理想的电网电压中加入幅值为基波幅值 30%的 3 次谐波，对算法进行仿真，仿真结果如图 7 所示。可以看出，由于在锁相环输入端采用了 DFT 算法，已将电网中的谐波量滤除，因此，电网是否含有谐波对锁相环没有任何影响，充分体现了本方案的优势。

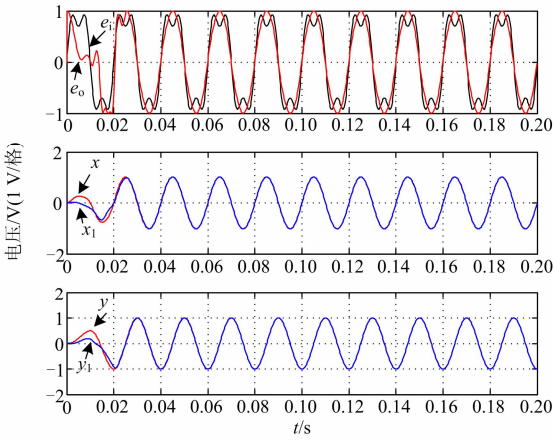

图 7 电网电压含有谐波时的仿真波形

Fig. 7 Simulation waveform under the condition of grid voltage harmonics

5 实验验证

为了验证电网发生故障时本文设计的锁相环的控制效果，进行了实验测试。实验系统主控核心采用美国 TI 公司的 TMS320F28335DSP 芯片，该芯片支持 32 位浮点运算，计算速度快。

利用函数信号发生器作为系统输入模拟电网电压进行实验，实验波形如图 8、图 9、图 10 所示。其中，图 9 为输入电压为正弦波时，电压频率由

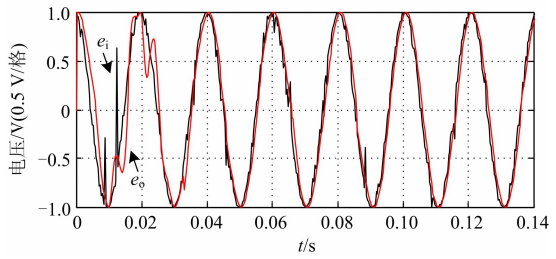

图 8 实验结果

Fig. 8 Experimental results

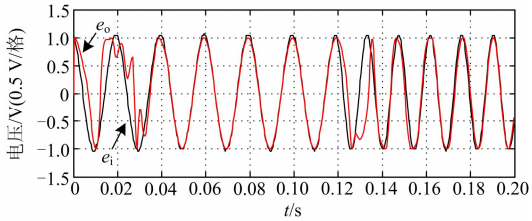

图 9 正弦波电压频率突变时的实验结果

Fig. 9 Experimental results for frequency mutation of sine wave voltage

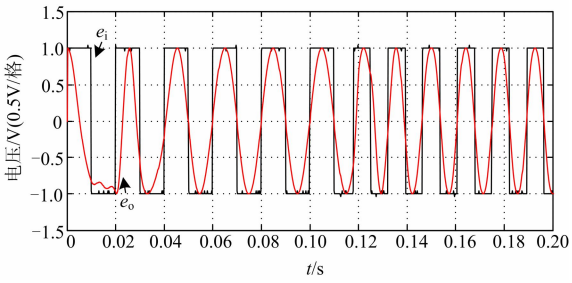

图 10 方波电压频率突变的实验结果

Fig. 10 Experimental results for frequency mutation of square wave voltage

50 Hz 突变为 70 Hz 时的实验波形。图 10 为输入电压为方波时，电压频率由 50 Hz 突变为 70 Hz 时的实验波形。实验结果表明：本文提出的锁相环能在一个周期内锁定输入输出信号的相位，且对输入电压起到了良好的滤波效果，符合理论分析和仿真结果。从理论和实际都证明了本文所提出的方法有效性。

6　结论

本文提出了一种新型单相数字锁相环方法。该方法基于 DFT 算法，并采用带遗忘因子的递推最小二乘法获得椭圆拟合参数，实现了基于虚拟两相正交电压矢量的单相数字锁相环控制。该方法的特点是：输入电压通过 DFT 提取基波信息，同时滤除高次波后，得到的两相正交电压矢量相位严格相差 90°，不存在输出会产生两倍频分量的问题；由于经过正交滤波，锁相环不受电网谐波的影响；利用椭圆拟合算法获得准确的锁相环输出信号，实现了快速锁相。通过仿真和实验，对电网电压的频率波动、相位突变以及谐波注入等参数变化的影响做了研究。结果表明，本文提出的方法切实有效，设计的锁相环具有较好的动静态特性，尤其适用于电网频率大范围变化的场合。

参考文献

[1] 周献飞, 杨仁刚, 孙钦斐. 基于广义二阶积分的新型单相逆变并网系统锁相环[J]. 沈阳农业大学学报, 2013, 44(3): 305-309.
ZHOU Xianfei, YANG Rengang, SUN Qinfei. A new PLL structure of single-phase inverter based on second-order generalized integrator[J]. Journal of Shenyang Agricultural University, 2013, 44(4): 305-309.

[2] GARDNER R M. Phase-lock techniques[M]. New York: John Wiley, 1979.

[3] ARRUDA L N, SILVA S M, FILHO B J C. PLL structures for utility connected systems[C] // Proceedings IEEE-PESC, 2001, 4: 2655-2660.

[4] 庞浩, 俎云霄, 王赞基. 一种新型的全数字锁相环[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(2): 37-41.
PANG Hao, ZU Yunxiao, WANG Zanji. A new design of all digital phase-locked loop[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(2): 37-41.

[5] 赵文才, 范声芳, 熊健, 等. 基于 DFT 算法的单相数字锁相环[J]. 电力电子技术, 2011, 45(4): 79-81.
ZHAO Wencai, FAN Shengfang, XIONG Jian, et al. Single-phase digital phase-locked loop based on DFT[J]. Power Electronics, 2011, 45(4): 79-81.

[6] 张靖, 洪磊, 谢川, 等. 基于 DSP 的 DFT 鉴相数字锁相策略研究及应用[J]. 电力电子技术, 2011, 45(7): 83-85.
ZHANG Jing, HONG Lei, XIE Chuan, et al. Design and application of digital PLL with DFT algorithm based on DSP[J]. Power Electronics, 2011, 45(7): 83-85.

[7] 郁祎琳, 徐永海, 刘晓博. 滑窗迭代 DFT 的谐波电流检测方法[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(13): 78-82.
YU Yilin, XU Yonghai, LIU Xiaobo. Study of harmonic current detection based on sliding-window iterative algorithm of DFT[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(13): 78-82.

[8] 任碧莹, 钟彦儒, 孙向东, 等. 基于有限冲击响应滤波器线性相移控制的单相系统数字锁相环[J]. 电工技术学报, 2008, 23(8): 121-125.
REN Biying, ZHONG Yanru, SUN Xiangdong, et al. A digital phase-locked loop based on the linear phase-shifted control implemented by a finite impulse response filter for a single-phase power system[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2008, 23(8): 121-125.

[9] 吴旭光. 系统建模和参数估计—理论与算法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.

[10] 吉正华, 韦芬卿, 杨海英. 基于 *dq* 变换的三相软件锁相环设计[J]. 电力自动化设备, 2011, 31(4): 104-107.
JI Zhenghua, WEI Fenqing, YANG Haiying. Three-phase software phase-locked loop based on *dq* reference frame[J]. Electric Power Automation Equipment, 2011,

31(4): 104-107.

[11] 邹益民, 汪渤. 一种基于最小二乘的不完整椭圆拟合算法[J]. 仪器仪表学报, 2006, 27(7): 808-812.
ZOU Yimin, WANG Bo. Fragmental ellipse fitting based on least square algorithm[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2006, 27(7): 808-812.

[12] 闫蓓, 王斌, 李媛. 基于最小二乘法的椭圆拟合改进算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2008, 34(3): 295-298.
YAN Bei, WANG Bin, LI Yuan. Optimal ellipse fitting method based on least-square principle[J]. Journal of Bei jing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(3): 295-298.

[13] 史旺旺, 杨鹏, 黄亚忠. 非同步采样下用于电力参数计算的滤波器设计[J]. 扬州大学学报:自然科学版, 2002, 5(3): 39-43.
SHI Wangwang, YANG Peng, HUANG Yazhong. Filter designing for calculating electrical parameters on asynchronous AC sampling[J]. Journal of Yangzhou University: Natural Science Edition, 2002, 5(3): 39-43.

[14] 陈丽兵, 史丽萍, 夏正龙, 等. 基于同步旋转变换及 DFT 的 SVG 指令电流检测法[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(13): 21-27.
CHEN Libing, SHI Liping, XIA Zhenglong, et al. A reference current detection method based on synchronous reference frame transformation and DFT for SVG[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(13): 21-27.

[15] 惠锦, 杨洪耕. 一种新的电力系统谐波间谐波两步检测法[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(23): 28-34.
HUI Jin, YANG Honggeng. Harmonic and inter-harmonic detection method based on neighboring spectral offsetting and windowed TDA in two stages[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(23): 28-34.

收稿日期：2014-07-09； 修回日期：2014-09-02

作者简介：

杜佳玮（1990-），男，通信作者，硕士研究生，助理工程师，主要研究方向为电力电子和电机驱动技术。E-mail: djwieby@ hotmail.com

（编辑 姜新丽）