

Lagrange 插值的改进算法研究及误差分析

张雷¹, 张国², 邱亚琴¹

(1. 河南机电高等专科学校自动控制系, 河南 新乡 453000; 2. 长庆油田矿区事业部, 陕西 西安 710018)

摘要: 电力系统采样过程中对数据同步性要求很高, 在 IEC61850 通信协议中推荐的插值算法同步方法。提出了一种改进的 Lagrange 插值算法, 利用构造函数方法, 补偿了一阶插值算法的误差, 提高了计算效率。并在 Matlab 中就电力系统采样不同频率条件下的稳态特性及暂态特性的衰减直流分量和极限条件下的电压暂降等情况对该算法进行了仿真实验, 实验证明了该改进算法在计算量和精度方面有一定的优势。

关键词: 合并单元; Lagrange 插值; 同步算法; 权函数; 误差分析

Research and error analysis of an improved Lagrange interpolation algorithm

ZHANG Lei¹, ZHANG Guo², QIU Ya-qin¹

(1. Henan Mechanical and Electrical Engineering College, Department of Automatic Control, Xinxian 453000, China;

2. Changqing Oilfield Mining Division, Xi'an 710018, China)

Abstract: There is a high demand for data synchronization in the sampling process in electric power system. Synchronization method is recommended by the interpolation algorithm in IEC61850 communication protocol. Here this paper puts forward an improved Lagrange interpolation algorithm. By using the method of constructing weighting function, it can compensate the error of the first-order interpolation algorithm and can improve the computational efficiency. Finally, the simulation experiments and a comparative analysis are carried out for the improved algorithm under different conditions such as steady-state characteristic for different sampling frequency, the transient characteristics of decaying DC component, limit of voltage sag, etc. Experiment result shows that the improved algorithm has many obvious advantages in computation and accuracy.

Key words: merging unit; Lagrange interpolation; synchronization algorithm; weight function; error analysis

中图分类号: TM76 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2014)16-0066-05

0 引言

近年来, 随着各种不对称性、冲击性、非线性负荷容量的不断增加, 电能质量问题日益突出, 数字化变电站已经成为日益强烈的发展要求^[1]。数字化变电站的核心基础是 IEC61850 通信协议^[2], 该协议将变电站分为站控层、间隔层、过程层, 规定各层之间和层内部采用高速以太网通信^[3]。

过程层中, 合并单元 (MU) 作为电子式互感器的数字接口, 通过以太网与间隔层二次设备相连, 是实现过程层与间隔层串行通信的重要部分。合并单元的主要作用是汇集一次侧的 12 路互感器采样信号, 将采样值按照 IEC61850-9 协议打包^[4], 为二次侧保护设备提供同步数据。IEC60044—8 标准中规定了电子式互感器数据同步的两种方法: 统一时钟同步法与插值法^[5]。

统一时钟同步法要求合并单元向每个电子互感器连接一条采样信号线, 电路结构复杂, 成本高^[6]。插值法方式节省了 12 路同步信号线路, 但需要合并单元有较强的数据处理能力, 插值算法所得的数据与实际值存在计算误差, 且误差因算法不同有所差异。本文介绍了一种改进的一阶插值算法, 对普通的一阶算法性能有明显改进。

1 插值算法原理

1.1 常见的插值算法

常见的插值算法有 Lagrange^[7]插值、Newton 插值^[8]等方法, 但从计算量、复杂程度和精度等因素考虑, 现在 IED 设备最常用的是 Lagrange 插值算法。

根据文献[9-10], 设原始信号为

$$I(t) = \sum_{k=0}^N A_{km} \sin(k\omega t + \phi_k) \quad (1)$$

根据文献[11], 一阶 Lagrange 插值 (以下简称一阶插值) 的计算公式为

$$I_1(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1} I(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} I(t_1) \quad (2)$$

其误差表示为

$$|R_1| \leq \frac{|I''(\xi)|}{8} T_s^2 \leq \frac{1}{8f_s^2} \sum_{k=0}^N A_{km} (k\omega)^2 \quad (3)$$

其中, f_s 为互感器采样频率, 可见随着 f_s 的减小, 误差会迅速增加, 且随着谐波次数的增加, 误差以平方倍数增加。

二阶 Lagrange 插值 (以下简称二阶插值) 的公式为

$$I_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} I(t_0) + \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} I(t_1) + \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} I(t_2) \quad (4)$$

二阶插值算法的误差根据文献[8]可得

$$R_2(t) = \left| \frac{I'''(\xi)}{3!} (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) \right| \leq \frac{1}{6} \omega^3 \sum_{n=1}^{\infty} [n^3 A_{km}^3] |(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)| \quad (5)$$

同样, 谐波次数越高, 误差增长越迅速。

比较以上两种插值方法, 一阶插值算法的计算量小, 速度较快, 但是精度较低; 二阶插值算法的计算量大, 所以速度较慢, 但精度很高。以下推荐一种改进的一阶插值算法 (以下简称改进算法), 计算量较二阶插值少, 且精度与二阶插值相当。

1.2 改进算法

取被测函数 $x(t)$ 的一段曲线如图 1 所示。

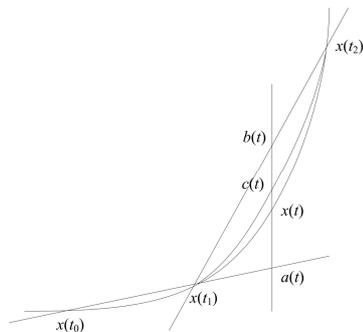


图 1 改进插值算法示意图

Fig. 1 Schematic diagram of improved interpolation algorithm

图中 $x(t_0)$ 、 $a(t)$ 、 $b(t)$ 为该通道连续三个周期的采样值, 同步时刻 t 所对应的真实值为 $x(t)$, $a(t)$ 为由 $x(t_0)$ 、 $x(t_1)$ 外推所得到的 t 时刻的插值, $b(t)$ 为由 $x(t_1)$ 、 $x(t_2)$ 内插所得到的 t 时刻的插值, $a(t)$ 、 $b(t)$ 均为一阶插值。

因为 $x(t)$ 为正弦函数, $x(t)$ 在大多数区段内可导, 即便有少量谐波存在, 曲线的拐点也不多。在如上区段内, $a(t)$ 、 $b(t)$ 分布在真实值的两侧, 误差反向相反。利用加权方法构造函数 $c(t)$, 让 $a(t)$ 、 $b(t)$ 的误差相互补偿, 使 $c(t)$ 比 $a(t)$ 、 $b(t)$ 更趋近于真实值。而在有拐点的区段, $a(t)$ 、 $b(t)$ 的误差反向相同, 但不论内插还是外推得到的插值误差都很小, 所以对精度的影响非常小。

在 t 从 t_1 到 t_2 逼近的过程中, 在靠近两端的部分, 由于内插值 $a(t)$ 的精度相对较高, 所以在这个部分 $a(t)$ 的权值应该较大; 而在区段的中间部分, $a(t)$ 的误差值较大, 需要 $b(t)$ 的误差进行补偿。所以设计权函数 $y(k)$ 为

$$y(k) = k - k^3 \quad (0 \leq k \leq 1) \quad (6)$$

k 在 t_1 到 t_2 的区段中从 0 到 1 变化。而由权函数 $Y(k)$ 构造的插值函数 $c(t)$ 则表示为

$$c(t) = y(k) \cdot a(t) + [1 - y(k)] \cdot b(t) \quad (7)$$

从计算量上来考虑, 一阶插值算法计算每个插值点需要 3 次乘法和 3 次加法, 二阶插值的计算量为 8 次乘法和 9 次加法^[7]。而改进算法每周只需要 1 次一阶插值的计算, 另一个一阶插值的结果可以由上周期的一阶插值结果通过加法获得, 然后进行加权计算。由于每个通道电子互感器的采样和插值点频率通常一致, 每次计算插值点时也有相同的时间滞后, 所以加权函数值的计算有一定的遗传性, 可以加权函数值本身的计算可以忽略。由此可得改进算法计算每个插值点的计算量为 5 次乘法和 5 次加法, 计算量介于一阶插值和二阶插值之间。

2 误差分析与仿真

该算法以某钢厂一实际生产环节所采集的电流样本为例, 利用 Matlab 对以上算法进行仿真。原函数的基波幅值为 86.792 7 A, 并含有 3 次至 19 次各奇次谐波含量。该函数表示为

$$\begin{aligned} \bar{I} = & 86.7927 \sin(\omega t) + 3.1509 \sin(3\omega t) + \\ & 4.7905 \sin(5\omega t) + 1.0683 \sin(7\omega t) + \\ & 0.2724 \sin(9\omega t) + 0.4423 \sin(11\omega t) + \\ & 0.2888 \sin(13\omega t) + 0.0581 \sin(15\omega t) + \\ & 0.00634 \sin(17\omega t) + 0.0437 \sin(19\omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

以下按照电力系统的稳态特性和暂态特性中的衰减直流分量和电压暂降对如上函数进行仿真实验^[12]。

2.1 稳态特性分析

按照 IEC61850 标准所规定的 32Fr (32Fr 表示 32 倍工频即每周波采样 32 点)、80Fr 和 200Fr 采样频率对电流进行采样, 获得采样值后分别以一阶 Lagrange 插值算法、二阶 Lagrange 插值算法和上述改进的一阶 Lagrange 插值算法对电流值进行插值计算, 并将所得结果和原函数进行对比, 获得一个工频周期内的误差曲线, 如图 2 所示。

由于在每两个相邻采样点的一个插值区段内, 插值所得的结果与原函数误差最大的部分通常出现在这个区段的中部, 在仿真过程中将插值点设在, 每个区段的中间位置, 实际插值点在区段内是随机分布, 所以实际产生的算法误差将小于仿真产生的算法误差。

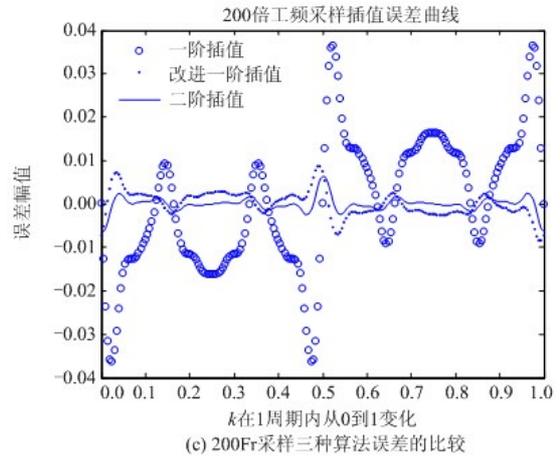
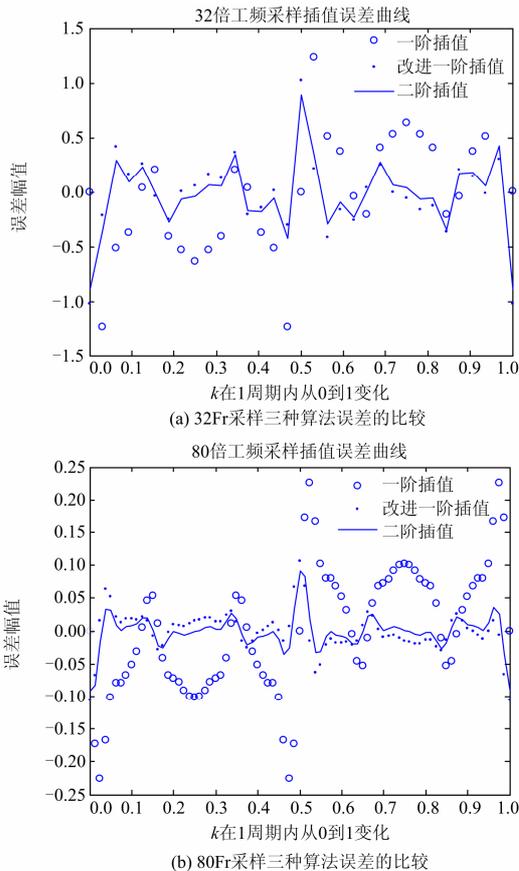


图 2 插值算法误差曲线

Fig. 2 Error curve of interpolation algorithm

从误差幅值进行判断, 对不含谐波分量的函数, 改进算法和二阶插值算法相对一阶算法误差要小很多。但是在含有谐波分量的实际情况下, 如果采样频率较低 (如 32Fr), 改进算法和二阶插值算法的误差明显放大。当采样频率提高 (如 80Fr 和 200Fr), 改进算法和二阶插值算法相对与一阶插值算法的误差收敛的更加迅速。且改进算法和二阶插值算法相比较, 改进算法的误差略大于二阶插值算法, 但在同一个数量级。

以上仿真的实验结果, 通过 FFT 运算可以得到各次谐波的幅值, 将这些计算得到的幅值和原函数中的幅值进行比较, 可以观察出不同采样频率下, 各种插值算法对谐波计算的影响。选取的实验平台为 simulink 中的电力系统工具箱 Simpowersystems 中的 Powergui / FFT Ansys, 实验结果如表 1 所示。

由以上实验数据表明, 在采样频率较低的情况下, 各种算法出现的误差都较大, 当采样频率提高后, 改进算法和二阶插值算法的计算结果经过 FFT 变换后得到的各次谐波幅值比较接近原函数。由于计算精度的原因, 对高次谐波的计算都不太精确。

2.2 暂态特性分析

(一) 衰减直流分量的分析

当原函数增加衰减直流分量部分, 设衰减直流分量表示为

$$\tilde{I} = 86.7927e^{\omega t} \quad (9)$$

则在 80fr 采样频率下得到一阶、二阶和改进算法的误差曲线如图 3 所示。从图中可以看出与稳态误差曲线基本吻合, 性能相当。

表 1 各种采样频率下插值计算结果经 FFT 变换所得各次谐波幅值

Table 1 Harmonic amplitudes obtained by the FFT of various frequency interpolation calculation results

谐波次数	原函数各次谐波幅值/A	32Fr 一阶插值结果/A	32Fr 改进算法/A	32Fr 二阶插值结果/A	80Fr 一阶插值结果/A	80Fr 改进算法/A	80Fr 二阶插值结果/A	200Fr 一阶插值结果/A	200Fr 改进算法/A	200Fr 二阶插值结果/A
1	86.792 7	86.37	86.85	86.79	86.73	86.8	86.79	86.76	86.78	86.77
3	3.150 9	3.02	3.16	3.14	3.13	3.15	3.15	3.14	3.14	3.14
5	4.790 5	4.22	4.78	4.7	4.7	4.8	4.79	4.76	4.78	4.78
7	1.068 3	0.83	1.03	1	1.03	1.07	1.07	1.06	1.07	1.07
9	0.272 4	0.17	0.24	0.23	0.26	0.27	0.27	0.3	0.3	0.3
11	0.442 3	0.21	0.35	0.33	0.4	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44
13	0.288 8	0.1	0.22	0.2	0.25	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29
15	0.058 1	0.01	0.07	0.06	0.05	0.06	0.06	0.04	0.04	0.04
17	0.063 4	0.01	0.07	0.06	0.05	0.06	0.06	0.05	0.05	0.05
19	0.043 7	0.1	0.22	0.2	0.03	0.04	0.04	0.05	0.05	0.05

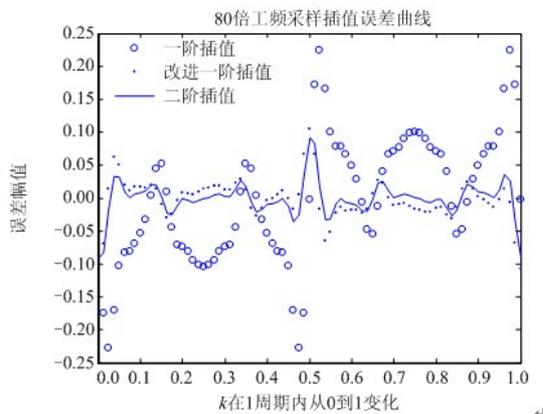


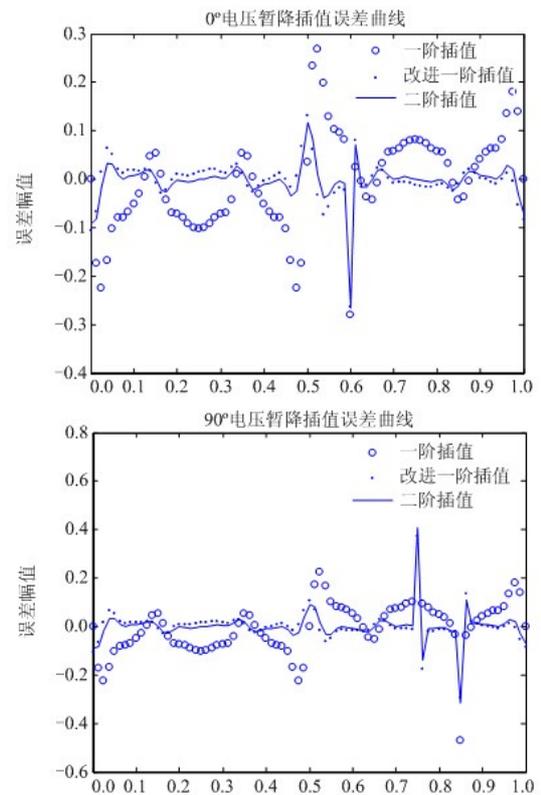
图 3 一阶、二阶和改进算法的误差曲线

Fig. 3 Error curves of first, second and improved algorithms

(二) 电压暂降分析

动态电能质量中最突出的问题就是电压暂降^[13], 对用户敏感设备影响最大的电压暂降出现在电压相角较小的区域^[14], 以下通过对 0° 和 90° 两种电压暂降的极限情况的仿真, 对上述改进插值算法和一阶、二阶插值算法进行对比验证。以 0.1 周期产生 20% 暂降深度建立电压暂降模型, 仿真得到误差曲线如图 4 所示。

实验证明, 当在 0° 时刻产生电压暂降, 插值算法产生的误差较小; 在 90° 时刻产生电压暂降, 插值算法产生的误差非常大。但插值算法比较来看, 改进一阶插值总体优于一阶插值, 和二阶插值性能相当。

图 4 0° 和 90° 两种电压暂降的极限情况的仿真误差曲线Fig. 4 Simulation error curve of 0° and 90° two voltage sags limiting case

3 结论

本文针对插值算法同步方式提出了一种改进的一阶 Lagrange 插值算法, 并在 Matlab 中就电力系

统采样不同频率条件下的稳态特性, 及暂态特性的衰减直流分量和极限条件下的电压暂降等情况对该算法进行了仿真实验, 实验证明了该改进算法在计算量和精度方面有一定的优势。在 FPGA+处理器的解决方案中, 便于保存加权系数, 有较大的应用价值, 对数字化变电站的其他 IED 设备的研制中也有一定的借鉴价值。

参考文献

- [1] 焦东升, 陆冬良. 动态电能质量实时监测系统的设计与实现[J]. 电网技术, 2011, 35(5): 110-114.
JIAO Dong-sheng, LU Dong-liang. Design and implementation of dynamic power quality real-time monitoring system[J]. Power System Technology, 2011, 35(5): 110-114.
- [2] 李永亮, 李刚. IEC61850 第 2 版简介及其在智能电网中的应用展望[J]. 电网技术, 2010, 34(4): 11-16.
LI Yong-liang, LI Gang. An introduction to 2nd edition of IEC 61850 and prospects of its application in smart grid[J]. Power System Technology, 2010, 34(4): 11-16.
- [3] 郑新才, 施鲁宁, 杨光, 等. IEC61850 标准下采样值传输规范 9-1、9-2 的对比和分析[J]. 电力系统保护与控制, 2008, 36(18): 47-50.
ZHENG Xin-cai, SHI Lu-ning, YANG Guang, et al. Comparison and analysis of sampled value transmission specification 9-1 and 9-2 in IEC61850 standard[J]. Power System Protection and Control, 2008, 36(18): 47-50.
- [4] IEC61850-5 communication networks and systems in substations-part 5: communication requirements for functions and device models[S].
- [5] IEC60044-8 instrument transformers, part 8: electronic current transformers[S].
- [6] 王伟明, 段雄英. 基于 FPGA 的电子式互感器智能合并单元研制[J]. 电力系统保护与控制, 2012, 40(2): 131-134, 140.
WANG Wei-ming, DUAN Xiong-ying. Intelligent merging unit of electronic transformer based on FPGA[J]. Power System Protection and Control, 2012, 40(2): 131-134, 140.
- [7] 刘崇茹. 基于序列二次规划算法的多馈入直流输电系统功率优化[J]. 电网技术, 2007, 31(19): 31-34, 40.
LIU Chong-ru. Active power optimization of multi-infeed DC power transmission system by use of sequence quadratic programming[J]. Power System Technology, 2007, 31(19): 31-34, 40.
- [8] HAO Ben-jian, LI Zan. BFGS quasi-Newton location algorithm using TDOAs and GROAs[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2013(3): 341-348.
- [9] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008: 22-46.
LI Qing-yang, WANG Neng-chao, YI Da-yi. Numerical analysis[M]. Fifth Edition Beijing: Tsinghua University Press, 2008: 22-46.
- [10] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
LI Qing-yang, WANG Neng-chao, YI Da-yi. Numerical analysis[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.
- [11] 乔洪新, 黄少锋, 刘勇. 基于二次插值理论电子式互感器数据同步的研究[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(15): 48-52.
QIAO Hong-xin, HUANG Shao-feng, LIU Yong. Discussion on data synchronization of electronic current transducer based on quadratic interpolation[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(15): 48-52.
- [12] 庞浩, 李东霞, 俎云霄, 等. 应用 FFT 进行电力系统谐波分析的改进算法[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 50-54.
PANG Hao, LI Dong-xia, ZU Yun-xiao, et al. An improved algorithm for harmonic analysis of power system using FFT technique[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(6): 50-54.
- [13] 周林, 吴红春, 孟婧. 电压暂降分析方法研究[J]. 高电压技术, 2008, 34(5): 1010-1016.
ZHOU Lin, WU Hong-chun, MENG Jing, et al. Study of the voltage sag analysis methods[J]. High Voltage Engineering, 2008, 34(5): 1010-1016.
- [14] 周晖, 易忠林. 电压暂降下整流装置特性仿真研究[J]. 电测与仪表, 2009, 46(523): 22-27.
ZHOU Hui, YI Zhong-lin. Study on the characteristic of AC/DC converter under voltage sags[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2009, 46(523): 22-27.

收稿日期: 2014-02-19; 修回日期: 2014-04-17

作者简介:

张雷(1977-), 男, 硕士研究生, 讲师, 研究方向为智能信息处理与嵌入式应用. E-mail: gcyt124@sohu.com

张国(1981-), 男, 工程师, 从事电气运行工作。