

# 连通矩阵准平方法网络拓扑分析

姚玉斌<sup>1</sup>, 宣俭<sup>2</sup>, 于娜<sup>1</sup>, 王丹<sup>1</sup>, 吴志良<sup>1</sup>

(1. 大连海事大学轮机工程学院, 辽宁 大连 116026; 2. 宁夏天净冶金公司, 宁夏 银川 750100)

**摘要:** 针对矩阵法网络拓扑速度很慢, 难以满足实用要求的问题, 在分析矩阵法利用连通矩阵运算进行网络拓扑的本质的基础上, 提出了连通矩阵准平方法网络拓扑分析方法。此方法每计算出一个新的连通矩阵元素, 马上用它更新老元素及其对称元素, 及时把节点间的连通关系反映到以后的计算中, 这样既提高了计算速度, 也省去了保存新连通矩阵的内存。本方法仅需两次矩阵平方运算, 就可得到全连通矩阵, 大大提高了矩阵法网络拓扑分析的速度。对一个实际大型电网进行了拓扑分析, 计算结果验证了本方法的正确性和有效性。

**关键词:** 网络拓扑; 邻接矩阵; 连通矩阵; 全连通矩阵; 矩阵平方运算

## Determination of network topology by quasi-square of the connectivity matrix

YAO Yu-bin<sup>1</sup>, XUAN Jian<sup>2</sup>, YU Na<sup>1</sup>, WANG Dan<sup>1</sup>, WU Zhi-liang<sup>1</sup>

(1. School of Marine Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;

2. Ningxia Tianjing Metallurgy Co., Ltd, Ningxia 750100, China)

**Abstract:** Matrix method of network topology is very time-consuming and unpractical. To deal with this problem, the principle of the matrix method which accomplishes network topology by the operation of the connectivity matrix is studied, and a network topology by quasi-square of the connectivity matrix is presented. By the presented method the element of the connectivity matrix and its symmetry element are updated immediately after the new one is calculated and the new connectivity of the nodes is used in the multiplication afterwards, which is fast and spares the storage for new connectivity matrix. Only two times of the matrix multiplications are required by the presented method to achieve the full connectivity matrix, thus the speed of network topology is increased greatly. A practical network being analyzed by the proposed method and the results prove the correctness and effectiveness of the proposed method.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (NSFC) (No. 61074017), the Education Department of Liaoning Province (No. 2008085) and national invention patent is applied (application No. 201010235958.0)

**Key words:** network topology; adjacency matrix; connectivity matrix; full connectivity matrix; matrix square operation

中图分类号: TM71 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2011)05-0031-04

## 0 引言

电力系统网络拓扑分析是能量管理系统和配电管理系统中非常重要的基础模块, 它的作用是把电力系统的物理模型转化为网络分析需要的数学模型。网络拓扑作为连通图分析方法, 主要有搜索法<sup>[1-8]</sup>和矩阵分析法<sup>[9-13]</sup>。两种拓扑分析方法相比, 搜索法原理简单、容易理解, 但编程繁琐; 矩阵分析法比较直观, 易于编程, 但内存需求量和计算量都很大。矩

阵分析法需要计算邻接矩阵的 $(n-1)$ 次方来求全连通矩阵( $n$ 为网络的节点数), 计算量很大。采用平方法<sup>[9]</sup>计算全连通矩阵可以有效减少矩阵分析法的计算时间。

无论采用邻接矩阵自乘还是平方法求全连通矩阵, 都涉及多次矩阵乘法计算, 计算量很大, 无法实用化。针对此问题本文深入分析了连通矩阵的意义, 认为各级连通矩阵反映节点间的关联关系和关联程度。实际上网络拓扑需要的仅仅是关联关系, 并不需要明确节点间的关联程度。因此每计算出一个连通矩阵元素后可以马上更新该矩阵元素, 这样有利于更快地求出全连通矩阵, 也节省了存储空间。据此提出了连通矩阵准平方法网络拓扑分析方法。

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61074017); 辽宁省教育厅资助项目(2008085); 已申请国家发明专利(申请号: 201010235958.0)

本方法只需要两次矩阵乘法运算就能求出全连通矩阵,大大提高了矩阵法网络拓扑的速度。另外本方法还利用邻接矩阵和连通矩阵的对称性,采用节点优化编号等手段来提高计算速度,效果比较明显。此方法具有概念清晰,分析速度快等特点,有效解决了矩阵法的实用性问题。

## 1 矩阵法网络拓扑

### 1.1 网络拓扑

电力网的网络拓扑分析主要分成两个步骤<sup>[1]</sup>:

① 搜索物理节点开关关联表,把通过闭合开关连在一起的物理节点组成母线。

② 搜索母线支路关联表,把通过支路连在一起的母线组成电气岛。

形成母线和形成电气岛这两个步骤的作用对象不同,但方法是相同的,都是图论的连通图分析问题。为了提高速度,形成母线时,可以把搜索范围限制在厂站内甚至厂站中同一电压等级内。也可以给数据排序,形成母线和电气岛时都在很小范围内搜索一个物理节点所连元件<sup>[7]</sup>。

### 1.2 邻接矩阵和连通矩阵

在电力网络中,物理模型中物理节点之间通过开关的连接关系,数学模型中母线之间通过支路的连接关系都可以抽象成图论的图,电力网络的物理节点(或母线)对应图的节点,开关(或支路)对应图的边。图的节点通过边的连接关系可以用邻接矩阵  $A$  表示。邻接矩阵为一个  $n$  阶方阵,它表示各节点之间的关联关系,当节点  $i$  和节点  $j$  相关联时,矩阵元素  $a_{ij}$  为 1; 否则  $a_{ij}$  为 0。邻接矩阵表示图中节点间的一级连通关系。

如果邻接矩阵自乘则得到连通矩阵  $T$ , 表示图中节点间一、二级连通关系,称为二级连通矩阵。连通矩阵的元素  $t_{ij}$  为 1 时,表示节点  $i$  和节点  $j$  直接相连,或通过一个中间节点相连。连通矩阵再乘以邻接矩阵则会表示一级至三级连通关系,为三级连通矩阵。重复这个过程,对于  $n$  个节点的图最多可得到  $n-1$  级连通关系。如果某级连通矩阵描述了图中节点间所有的连通关系,则称为全连通矩阵。邻接矩阵表示节点间一级连接,因此邻接矩阵是一级连通矩阵。

### 1.3 矩阵法

邻接矩阵自乘的矩阵法公式如式(1)所示。

$$T^{(k+1)} = T^{(k)} \cdot A \quad (1)$$

式中:  $A$  为邻接矩阵;  $T$  为连通矩阵; 上标  $(k)$  表示该矩阵为  $k$  级连通矩阵。

重复式(1)直到邻接矩阵的  $n-1$  次方,可得

到全连通矩阵。通过对连通矩阵平方的方法可以快速得到全连通矩阵,由此得到平方法公式如式(2)。

$$T^{(2k)} = T^{(k)} \cdot T^{(k)} \quad (2)$$

式(2)中的一级连通矩阵  $T^{(1)} = A$ 。

在最坏的情况下,利用式(1)求取全连通矩阵需要  $n-2$  次矩阵乘法运算,利用式(2)则需要  $\log_2(n-1)$  次矩阵乘法运算。实际上求全连通矩阵需要的矩阵乘法次数要少于上述次数,如果相邻两级连通矩阵完全相同就得到了全连通矩阵<sup>[9]</sup>。即便如此,电气岛分析时一般也要几次甚至几十次矩阵乘法运算,因而矩阵法的计算速度很慢。

## 2 连通矩阵准平方法网络拓扑分析

矩阵法求取全连通矩阵时,需要进行多次矩阵乘法运算,很费时间,因此矩阵法的计算时间很长,不能满足实用要求。为解决这一问题,本文提出了连通矩阵准平方法网络拓扑分析方法。

### 2.1 连通矩阵元素的计算

采用式(2)求连通矩阵时,连通矩阵元素的计算如式(3)示。

$$t_{ij}^{(2k)} = \sum_{m=1}^n t_{im}^{(k)} t_{mj}^{(k)} \quad (3)$$

由于连通矩阵是对称的,其元素  $t_{mj} = t_{jm}$ , 因此式(3)可改写为式(4)。

$$t_{ij}^{(2k)} = \sum_{m=1}^n t_{im}^{(k)} t_{jm}^{(k)} \quad (4)$$

### 2.2 连通矩阵元素的更新

连通矩阵反映节点间的连接关系,对于一个  $m$  级连通矩阵,需要关心的是两个节点之间是否连通,并不需要知道两个节点之间是几级连通。如果每求出一个元素,马上用它更新矩阵元素,可以把两个节点通过若干个节点间接连接的关系及早反映在连通矩阵中,有利于更快地求出全连通矩阵,也省去了保存新连通矩阵的存储空间。这样式(4)修改为式(5)。

$$t_{ij} = \sum_{m=1}^n t_{im} t_{jm} \quad (5)$$

式(5)不再区分  $t_{ij}$  是哪一级连通矩阵的元素,能够表示节点  $i$  和节点  $j$  是否关联即可。同时也不需要计算所有的连通矩阵元素,仅仅那些原来是 0 的矩阵元素才需要计算。计算时也不必从 1 到  $n$  计算  $n$  个乘法项,只要能确定  $t_{ij} = 1$  就可以提前结束计算过程。

### 2.3 矩阵的对称性

连通矩阵是对称阵, 计算连通矩阵时, 每计算一个矩阵元素, 不仅更新该元素, 同时根据对称性对其对称元素进行更新, 这样可以提前更新对称元素, 加快求取连通矩阵的进程, 减少矩阵乘法次数。根据对称性求取连通矩阵元素的公式如式 (6):

$$t_{ji} = t_{ij} = \sum_{m=1}^n t_{im} t_{jm} \quad (6)$$

求取连通矩阵元素  $t_{ij}$  的框图见图 1。

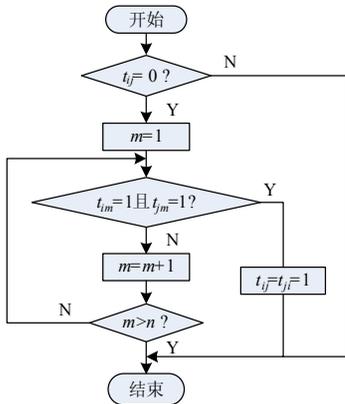


图 1 连通矩阵元素计算流程图

Fig.1 Flow chart of the computation of the element of the connectivity matrix

### 2.4 节点优化编号

节点优化编号可以进一步提高稀疏矩阵技术的效率, 高斯消去法一般按节点出线数由小到大的顺序编号<sup>[14]</sup>, 这样可以减少消去过程中非零元素的注入。网络拓扑需要确定各节点间的连接关系, 矩阵相乘, 编号小的节点连接的节点越多, 越有利于确定连通关系, 因此基于矩阵相乘的网络拓扑方法采用按节点出线数由大到小的顺序编号<sup>[9]</sup>。

### 2.5 行扫描法确定连通图

求得全连通矩阵后, 可以采用多种方法确定连通图, 其中行扫描法比较方便、速度比较快。行扫描法确定连通图的流程图见图 2。

## 3 算例分析

本文算例为某一时期的杭州电网, 杭州电网是一大型电网, 当时的计算规模为: 厂站 187 个, 母线段 715 个, 开关 7 329 个, 输电线路 318 条, 变压器 250 台, 其中双绕组变压器 127 台, 三绕组变压器 123 台, 串联电抗器支路 11 条, 无功补偿电容 232 个, 无功补偿电抗 27 个。物理节点数 7 097 个, 支路包括输电线路、变压器 (三绕组变压器为 3 条

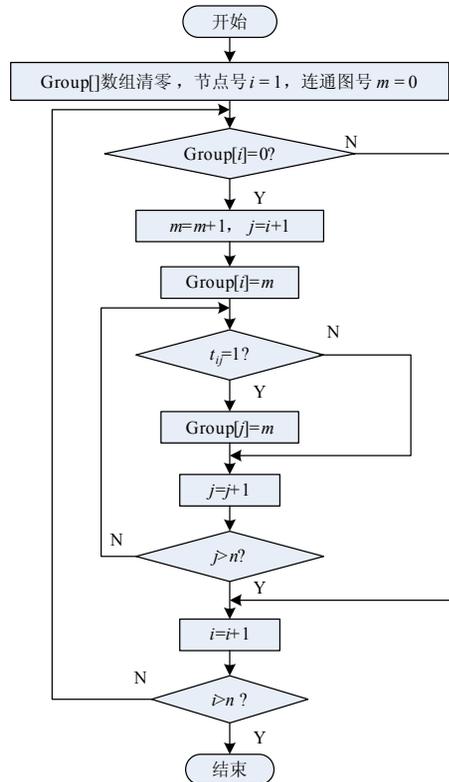


图 2 行扫描法确定连通图的流程图

Fig.2 Flow chart of detecting the connectivity by row sweep

支路) 和串联电抗器支路共 825 条。

采用本文算法对算例进行了网络拓扑分析, 本文算法中利用了连通矩阵的对称性求其对称元素, 并对网络的节点按出线数由大到小的顺序进行了优化编号。

算例是在主频为 2.53 GHz 的 Intel Core2 处理器的 PC 机上进行的。通过拓扑分析形成母线 957 个, 电气岛 49 个 (其中 1 个为活岛)。活岛的母线数是 704 个, 48 个死岛共包括 122 个母线, 其余为孤立母线。

### 3.1 本文算法效果分析

本文算法与两种传统矩阵法进行了比较, 几种算法电气岛分析时矩阵乘法次数见表 1。

表 1 电气岛分析时矩阵乘法次数

Tab.1 The number of matrix multiplications in network configuration

算法	矩阵乘法次数
邻接矩阵自乘算法	23
连通矩阵平方算法	6
本文算法	2

表 1 可见, 邻接矩阵自乘算法的矩阵乘法次数较多, 连通矩阵平方算法可以明显减少矩阵乘法次

数。本文算法的矩阵乘法次数仅为 2 次，比两种对比算法少得多。

几种矩阵算法的运行时间见表 2。

表 2 几种矩阵法所需的计算时间  
Tab.2 Computer time required by different matrix methods

算法	程序运行时间/s		
	母线分析	电气岛分析	总时间
邻接矩阵自乘算法	0.233	25.204	25.437
连通矩阵平方算法	0.103	3.425	3.528
本文算法	0.284	0.455	0.739

表 2 可见，连通矩阵平方算法比邻接矩阵自乘算法的计算速度明显要快，本文算法则比上述两种算法快得多。但本文算法的母线分析时间要比对比的两种算法长，因此把连通矩阵平方算法与本文算法结合起来可以取得更好的效果。电气岛分析消耗了矩阵法的大部分计算时间。这是因为电气岛分析时矩阵阶数很大，乘法运算时间长；而母线分析时在各个电压等级内进行，涉及的矩阵阶数较小。

### 3.2 连通矩阵对称性的考虑

利用连通矩阵的对称性来计算矩阵元素，可以明显减少计算量，计算结果见表 3。

表 3 是否考虑连通矩阵的对称性的计算结果比较  
Tab.3 Results of methods of whether with or without considering the symmetry of the connectivity

是否考虑对称性	程序运行时间/s			电气岛分析时矩阵乘法次数
	母线分析	电气岛分析	总时间	
考虑对称性	0.284	0.455	0.739	2
不考虑对称性	0.374	0.930	1.304	3

表 3 可见，利用连通矩阵的对称性计算连通矩阵元素可以明显提高矩阵法的计算速度，减少矩阵乘法次数。

### 3.3 节点优化编号的影响

不同节点编号方式的计算结果见表 4。

表 4 不同编号方式的计算结果比较  
Tab.4 Results of methods with different numbering

编号方法	程序运行时间/s		
	母线分析	电气岛分析	总时间
原始编号	0.284	0.522	0.806
按出线数由大到小编号	0.284	0.455	0.739
按出线数由小到大编号	0.287	0.782	1.069

表 4 可见，各种编号方法对矩阵法的运行速度有较大影响。应该按节点出线数由大到小的顺序对节点进行优化编号。

## 4 结语

矩阵法的各级连通矩阵反映节点间的关联关系和关联程度。实际上网络拓扑需要的仅仅是关联关系，不需要明确节点间是几级连通。因此每计算出一个连通矩阵元素后可以马上更新当前连通矩阵，这样有利于更快地求出全连通矩阵，也节省了存储空间。

邻接矩阵和连通矩阵都是对称矩阵，利用连通矩阵的对称性，可以加速对称元素的更新，有利于更快地求出全连通矩阵，减少矩阵乘法次数，提高网络拓扑速度。

采用按节点出线数由大到小的顺序对节点进行优化编号，可以进一步提高网络拓扑分析的速度。

### 参考文献

- [1] 于尔铿. 电力系统状态估计[M]. 北京: 水利电力出版社, 1985.
- [2] 于尔铿, 刘广一, 周京阳, 等. 能量管理系统(EMS) [M]. 北京: 科学出版社, 1998
- [3] Bose A, Clements K A. Real-time modeling of power networks[J]. Proceedings of the IEEE, 1987, 75(12): 1607-1622.
- [4] Prais M, Bose A. A topology processor that tracks network modifications over time[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1988, 3(3): 992-998.
- [5] Yehsakul P D, Dabbaghchi I. A topology-based algorithm for tracking network connectivity[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1995, 10(1): 339-346.
- [6] 吴文传, 张伯明. 基于图形数据库的网络拓扑及其应用[J]. 电网技术, 2002, 26(2): 14-18. WU Wen-chuan, ZHANG Bo-ming. A graphic database based network topology and its application[J]. Power System Technology, 2002, 26(2): 14-18.
- [7] 姚玉斌, 晋文转, 靳力. 配电网快速网络拓扑分析算法[J]. 继电器, 2005, 33(19): 31-35. YAO Yu-bin, JIN Wen-zhuan, JIN Li. Fast network topology method for a distribution network[J]. Relay, 2005, 33(19): 31-35
- [8] 陈星莺, 孙恕坚, 钱锋. 一种基于追踪技术的快速电力网拓扑分析方法[J]. 电网技术, 2004, 28(5): 22-24, 34. CHEN Xing-ying, SUN Shu-jian, QIAN Feng. A fast power system network topology based on tracking technology[J]. Power System Technology, 2004, 28(5): 22-24, 34.
- [9] Goderya F, Metwally A A, Mansour O. Fast detection and identification of islands in power networks[J]. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1980, 99(1): 217-221.

(下转第 40 页 continued on page 40)

- of Power Tech, Port, Portugal: 2001, 3: 5-8.
- [9] Zheng Jiang, Bin Liu, Dai Liankui. A hybrid genetic algorithm integrated with sequential linear programming[C]. //Proceedings of Machine Learning and Cybernetics. Xi'an, China: 2003, 2: 1030-1033.
- [10] 姚煜, 蔡燕春. 离散粒子群与内点法结合的电力系统无功优化[J]. 电力系统保护与控制, 2010, 38(3): 48-52.  
YAO Yu, CAI Yan-chun. A hybrid strategy based on DPSO and IPM for optimal reactive power flow[J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(3): 48-52.
- [11] 刘方, 颜伟, YU D C. 基于遗传算法和内点法的无功优化混合策略[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25 (15): 67-72.  
LIU Fang, YAN Wei, YU D C. A hybrid strategy based on GA and IPM for optimal reactive power flow[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25 (15): 67-72.
- [12] 刘沛津, 谷立臣, 韩行. 基于内点法与改进遗传法的无功规划优化混合算法[J]. 电力系统保护与控制, 2008, 36(17): 56-59.  
LIU Pei-jin, GU Li-chen, HAN Xing. Reactive power planning based on IPM and improved GA hybrid method[J]. Power System Protection and Control, 2008, 36(17): 56-59.
- [13] 李秀卿, 孙守刚, 姜世金, 等. 基于混合优化微分进化算法的电力系统无功优化[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(7): 26-29.  
LI Xiu-qing, SUN Shou-gang, JIANG Shi-jin, et al. A hybrid optimization based on DE for optimal reactive power flow[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(7): 26-29.
- [14] 刘宝英, 杨仁刚, 李慧, 等. 基于混沌遗传算法的电力系统无功优化[J]. 电力系统及其自动化学报, 2006, 18 (5): 49-52.  
LIU Bao-ying, YANG Ren-gang, LI Hui, et al. Reactive power optimization based on chaos genetic algorithm in electric power systems[J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2006, 18 (5): 49-52.
- [15] Yan Wei, Yu Juan, Yu D C, et al. A new optimal reactive power flow model in rectangular form and its solution by predictor corrector primal dual interior point method[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2006, 21 (1): 61-67.
- [16] 李文沅. 电力系统安全经济运行——模型与方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1989.  
LI Wen-yuan. Safety economical power system-model and method[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1989.
- [17] Wu Q H, Cao Y J, Wen J Y. Optimal reactive power dispatch using an adaptive genetic algorithm[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1998, 20 (8): 563-569.

收稿日期: 2010-03-07; 修回日期: 2010-04-12

作者简介:

董洁(1985-), 女, 硕士研究生, 研究方向为电力系统无功优化技术及应用; E-mail: dongjie198546@126.com

赵凤展(1971-), 女, 副研究员, 博士, 研究方向为电力系统分析与控制、配电自动化;

杨仁刚(1953-), 男, 博士生导师, 教授, 研究方向为电力系统分析与控制、配电自动化。

(上接第 34 页 continued from page 34)

- [10] 姚玉斌, 王丹, 吴志良, 等. 方程求解法网络拓扑分析[J]. 电力自动化设备, 2010, 30(1): 79-83  
YAO Yu-bin, WANG Dan, WU Zhi-liang, et al. Network topology analysis by solving equations[J]. Electric Power Automation Equipment, 2010, 30(1): 79-83.
- [11] 崔岩. 邻接矩阵染色法及其在电力系统网络拓扑分析中的应用[J]. 电力系统保护与控制, 2008, 36(16): 52-56.  
CUI Yan. Matrix coloring method and its application in network topology analysis of power system[J]. Power System Protection and Control, 2008, 36(16): 52-56.
- [12] 周琰, 周步祥, 邢义. 基于邻接矩阵的图形化网络拓扑分析方法[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(17): 49-52, 56.  
ZHOU Yan, ZHOU Bu-xiang, XING Yi. Graphical power network topology analysis based on adjacency matrix[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37(17): 49-52, 56.
- [13] 周云成, 付立思, 许童羽, 等. 基于 GIS 的 10 kV 配电网络电气连通性分析[J]. 电力系统保护与控制, 2010, 38(10): 83-88.  
ZHOU Yun-cheng, FU Li-si, XU Tong-yu, et al. Electric connectivity analyzing for 10 kV distribution network based on GIS[J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(10): 83-88.
- [14] 张伯明, 陈寿孙, 严正. 高等电力网络分析[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2007.

收稿日期: 2010-08-18; 修回日期: 2010-10-31

作者简介:

姚玉斌(1965-), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为电力系统分析和控制; E-mail: yaoyubin@dlnmu.edu.cn

宣俭(1973-), 男, 本科, 主要从事电力系统继电保护工作;

于娜(1987-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为电力系统分析和控制。