

# 大规模机组组合问题计及网络约束的线性化求解方法

苏济归, 舒隽, 谢国辉, 张粒子

(华北电力大学电气与电子工程学院, 北京 102206)

**摘要:** 为了提高求解机组组合问题计算效率, 给出线性化方法, 将目标函数分段线性化, 将启机费用作为约束并将其线性化, 同时将网络安全约束通过直流潮流模型进行线性化, 从而建立较完备的混合整数线性规划的机组组合模型。采用世界上广为流行的 CPLEX 优化求解器求解, 在对偶间隙设定为较合理的情况下, 求解速度快。不同测试算例表明, 该方法速度快, 精度较高, 能够求解较大规模的机组组合问题。

**关键词:** 机组组合; 线性化方法; 混合整数线性规划; CPLEX

## Linearization method of large scale unit commitment problem with network constraints

SU Ji-gui, SHU Jun, XIE Guo-hui, ZHANG Li-zi

(School of Electric and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

**Abstract:** To improve computational efficiency of unit commitment(UC) problem, linearization method is put forward. First object function is linearized through piecewise-linear method, startup cost is treated as constraints which are also linearized, and network security constraints are linearized through direct current (DC) flow model, so a complete mixed integer linear programming unit commitment model is built. Then the model is solved through a popular CPLEX solver. Different examples show that calculation is very fast when the dual gap is reasonable, and the above-mentioned method can improve computational efficiency to solve large scale unit commitment problem.

**Key words:** unit commitment; linearization method; mixed integer linear programming; CPLEX

中图分类号: TM71 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2010)18-0135-05

## 0 引言

电力系统机组组合 (Unit Commitment, UC) 是要在满足系统各种约束的条件下制定出合理的开停机方案, 实现总发电费用最小目标。从数学角度而言, UC 问题是一个 NP-hard 问题, 目前很难在合理的时间内找到最优解。专家学者已提出求解 UC 问题的若干算法, 如优先次序法<sup>[1]</sup>、改进的动态规划法<sup>[2-3]</sup>、拉格朗日松弛法<sup>[4-6]</sup>、进化算法<sup>[7-9]</sup>、内点半定规划法<sup>[10-11]</sup>、混合整数线性规划 (Mixed Integer Linear Programming, MILP) 法<sup>[12-15]</sup>。其中优先次序法实现简单, 计算速度快, 但对于有些约束难以处理, 并且计算精度不高; 动态规划法难以处理时段间耦合的爬坡约束且易出现维数灾; 拉格朗日松弛法是目前研究较多的一种算法, 这是一种解耦算法, 通过不断修正 Lagrangran 乘子来进行协调, 但是对于复杂多约束模型, 在实际操作中

将很难协调乘子, 无法有效抑制震荡; 进化算法是全局优化, 但是求解时间过长, 不利于工程实际应用; 内点半定规划法能处理离散变量, 可以在多项式时间里收敛, 但是在半正定矩阵的形成上需要花费较长时间, 尤其是针对大规模机组组合问题, 并且如果是复杂多约束模型优化问题, 优化结果中会出现过多非整数解的启停变量。

本文将传统机组组合模型线性化, 建立较完备的 MILP 模型, 采用 CPLEX 求解器求解该模型。

## 1 线性化的机组组合模型

### 1.1 目标函数的线性化

发电费用一般可用二次曲线表征:  $f(p_i) = a_i p_i^2 + b_i p_i + c_i$ 。将该二次费用曲线除去常数项之后, 将该二次费用曲线  $f(p_i) = a_i p_i^2 + b_i p_i$  分段线性化。以分三段为例, 分段线性化后的费用曲线如图 1。

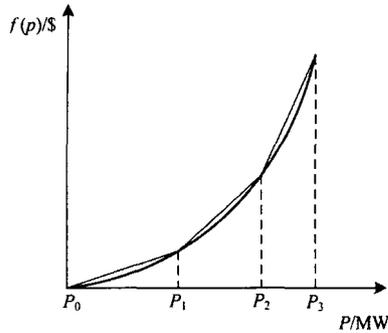


图 1 发电费用曲线的分段线性化

Fig.1 Piecewise-linear of generation cost curve

目标函数线性化模型为:

$$\min F(u_{it}, p_{it}) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left( \sum_{l=1}^L K_{i,l} \cdot p_{i,t,l} + u_{i,t} \cdot c_i + s_{i,t} \right) \quad (1)$$

式中:  $K_{i,l}$  为机组  $i$  发电费用曲线分段线性化后第  $l$  段斜率;  $p_{i,t,l}$  为机组  $i$  在第  $t$  时段第  $l$  段出力;  $u_{i,t}$  为机组  $i$  在第  $t$  时段的启停状态;  $u_{i,t}=1、0$  分别表示开机状态和停机状态;  $a_i, b_i, c_i$  为机组  $i$  发电费用二次函数的二次项、一次项、常数项系数;  $N、T、L$  分别为机组数、时段数和线性分段的段数;  $s_{i,t}$  表示机组  $i$  在第  $t$  时段的启机费用。

### 1.2 约束条件的线性化

(1) 分段出力中每一段出力的约束

$$u_{i,t} P_{i,l,\min} \leq p_{i,t,l} \leq u_{i,t} P_{i,l,\max} \quad (2)$$

式中,  $P_{i,l,\min}、P_{i,l,\max}$  分别为机组出力分段后机组  $i$  的第  $l$  段出力的最小值和最大值。

(2) 功率平衡约束

$$\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^L p_{i,t,l} - P_t^D = 0 \quad (3)$$

式中,  $P_t^D$  为第  $t$  时段的系统总负荷。

(3) 爬坡约束

同时考虑两类爬坡约束: 启停爬坡约束和连续运行爬坡约束。

$$\sum_{l=1}^L p_{i,t,l} - \sum_{l=1}^L p_{i,t-1,l} \leq u_{i,t-1} (P_i^{\text{up}} - S_i^{\text{up}}) + S_i^{\text{up}} \quad (4)$$

$$\sum_{l=1}^L p_{i,t-1,l} - \sum_{l=1}^L p_{i,t,l} \leq u_{i,t} (P_i^{\text{down}} - S_i^{\text{down}}) + S_i^{\text{down}} \quad (5)$$

式中:  $P_i^{\text{up}}、P_i^{\text{down}}$  分别为机组  $i$  连续运行的升出力速率和降出力速率;  $S_i^{\text{up}}、S_i^{\text{down}}$  分别为机组  $i$  的启机升出力速率和停机降出力速率。

(4) 启机费用约束

考虑热启动和冷启动, 约束判据分别为:

$$s_{i,t} = \begin{cases} C_i^{\text{hot}}, & 1 \leq t_{i,t}^{\text{off}} \leq T_i^{\text{off}} + T_i^{\text{cold}} \\ C_i^{\text{cold}}, & t_{i,t}^{\text{off}} > T_i^{\text{off}} + T_i^{\text{cold}} \end{cases}$$

式中:  $C_i^{\text{hot}}、C_i^{\text{cold}}$  分别为机组  $i$  的热启动费用和冷启动费用;  $T_i^{\text{off}}、T_i^{\text{cold}}$  分别为机组  $i$  的允许最小连续停机时间和冷启动时间;  $t_{i,t}^{\text{off}}$  为机组  $i$  在第  $t$  时段之前 (不包括第  $t$  时段) 的连续停机时间。

常规线性化机组组合模型之所以难以考虑启动费用, 是因为启机费用是非线性, 文献[13]将启机费用与停机时间的函数曲线梯级分段, 但模型中没有考虑机组的初始启停状态, 本文只考虑冷启和热启, 相当于梯级分段只分两段, 且考虑机组的初始启停状态。

对于热启动费用约束, 只需知道机组在前一时段的启停状态; 对于冷启动费用约束, 需要知道机组前  $T_i^{\text{off}} + T_i^{\text{cold}} + 1$  时段的启停状态。具体的线性约束如式 (6) ~ (8):

$$s_{i,t} \geq C_i^{\text{hot}} \left( u_{i,t} - \sum_{m=1}^{\min\{t-1,1\}} u_{i,t-m} - \sum_{m=1}^{2-t} U_{i,m}^0 \right) \quad (6)$$

$$s_{i,t} \geq C_i^{\text{cold}} \left( u_{i,t} - \sum_{m=1}^{\min\{T_i^{\text{off}}+T_i^{\text{cold}}+1,t-1\}} u_{i,t-m} - \sum_{m=1}^{T_i^{\text{off}}+T_i^{\text{cold}}+2-t} U_{i,m}^0 \right) \quad (7)$$

$$s_{i,t} \geq 0 \quad (8)$$

式中:  $U_{i,m}^0$  为前一个日前发电计划中机组  $i$  从最后一个时段倒数向前数第  $m$  个时段的启停状态; 热启动费用约束不等式 (6) 右边括号内的表达式含义为机组  $i$  的  $t$  时段的启停状态与前一时段的启停状态之差 ( $t=1$  时, 前一时段指初始启停状态  $U_{i,1}^0$ ); 冷启动费用约束不等式 (7) 右边括号内的表达式含义为机组  $i$  的  $t$  时段的启停状态依次减去前  $T_i^{\text{off}} + T_i^{\text{cold}} + 1$  时段的启停状态 ( $t \leq T_i^{\text{off}} + T_i^{\text{cold}} + 1$  时, 还要减去机组  $i$  的初始启停状态  $U_{i,m}^0$ )。

(5) 启停时间约束

$$(u_{i,t-1} - u_{i,t})(t_{i,t}^{\text{on}} - T_i^{\text{on}}) \geq 0 \quad (9)$$

$$(u_{i,t} - u_{i,t-1})(t_{i,t}^{\text{off}} - T_i^{\text{off}}) \geq 0 \quad (10)$$

该约束参照文献[10]中提出的方法进行线性化:

$$\sum_{\tau=t}^{a(z)} u_{i,\tau} \geq (u_{i,t} - u_{i,t-1})b(z) + \delta(t-1)a_i^0 \quad (11)$$

$$\sum_{\tau=t}^{a(z)} (1 - u_{i,\tau}) \geq (u_{i,t-1} - u_{i,t})b(z) + \delta(t-1)b_i^0 \quad (12)$$

式中:  $a(z) = \min \{t+z-1, T\}$ ,  $b(z) = \min \{z, T-t+1\}$ ,  
 $a_i^0 = u_{i,1} U_{i,1}^0 \max \{0, T_i^{\text{on}} - T_i^0\}$ ,  $\delta(t-1)$  为单位冲激函数,  
 $b_i^0 = (1-u_{i,1})(1-U_{i,1}^0) \max \{0, T_i^{\text{off}} + T_i^0\}$ ;  $T_i^{\text{on}}$ 、 $T_i^{\text{off}}$   
 分别为机组  $i$  的允许最小连续开机时间和最小连续  
 停机时间,  $T_i^0$  为机组  $i$  的初始启停时间,  $T_i^0 > 0$  表  
 示初始状态已经连续运行的时间,  $T_i^0 < 0$  表示初始  
 状态已经连续停运的时间。

(6) 备用约束

$$\sum_i^N u_{i,t} P_{i,\max} \geq P_i^D (1 + R_{\text{rate}}) \quad (13)$$

式中:  $P_{i,\max}$  为机组  $i$  最大出力;  $R_{\text{rate}}$  为负荷备用率。

(7) 机组启停状态约束

$$u_{i,t} = 1 \text{ or } 0 \quad (14)$$

(8) 直流潮流网络约束

$$-P_{k,\max} \leq \sum_{j=1}^n S_{j,k} P_{j,\text{net}} \leq P_{k,\max} \quad (15)$$

式中:  $S_{j,k}$  为第  $j$  节点注入功率对第  $k$  条线路潮流  
 的灵敏度;  $P_{j,\text{net}}$  为第  $j$  节点的净注入功率;  $P_{k,\max}$  为  
 第  $k$  条线路的稳定极限。

## 2 算例分析

针对不同测试算例进行仿真分析, 仿真计算在  
 PC 机上进行, CPU 为 Celeron-1.86 GHz, 内存为  
 1.0 GB, 在 Matlab 7.0 环境下调用 CPLEX<sup>[16]</sup> 求解器  
 进行求解。

### 2.1 不考虑网络约束和启停爬坡约束

10 机参数及各时段总负荷数据见文献[4], 参照  
 文献[11], 机组 1、3、4 的运行爬坡速率为  
 $P_i^{\text{up}} = P_i^{\text{down}} = 40 \text{ MW/h}$ , 负荷备用率  $R_{\text{rate}}$  取 10%。收  
 敛曲线见图 2 和图 3, 图 2、图 3 的横坐标均为迭  
 代过程中依次出现的可行解序号, 图 2、图 3 的纵坐标  
 分别指各个可行解对应的目标函数和对偶间隙, 目标  
 函数最终收敛到 564 664.54, 计算时间为 0.625 s。

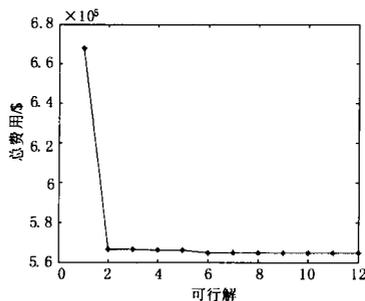


图 2 目标函数收敛曲线

Fig.2 Convergent curve of object function

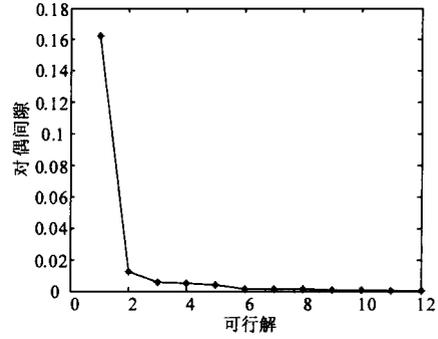


图 3 对偶间隙收敛曲线

Fig.3 Convergent curve of dual gap

10 机 24 时段机组组合结果如表 1。

表 1 机组组合结果

Tab.1 Results of UC

机组编号	24 个时段机组启停状态
1	111111111111111111111111
2	111111111111111111111111
3	000001111111111111111100
4	000011111111111111111110
5	0011111111111111111111000
6	0000000011111100000111000
7	0000000011111100000011100
8	0000000001111000000010000
9	0000000000110000000000000
10	0000000000010000000000000

为了验证系统规模增大时的计算效率, 以文  
 献[4]中的 10 机参数为基础, 扩展到 20、40、60、  
 80、100、200、400 台机组, 各时段的系统总负荷  
 也按比例扩展。计算终止条件为对偶间隙达到  
 0.5%, 总费用为将各机组各时段的出力代回到各机  
 组的二次费用曲线计算的结果, 求得的结果与文  
 献[11]列出的结果比较如表 2。

表 2 不同算法优化结果比较

Tab.2 Results comparison of different algorithms

机组台数	LR	GA	MA	SDP	本文计算结果	
	平均 / \$	平均 / \$	平均 / \$	/ \$	总费用 / \$	计算时间 / s
10	566493	567329	566453	567034	564665	0.63
20	1128395	1130106	1128824	1130724	1125581	0.83
40	2250223	2262585	2262477	2259652	2248376	2.06
60	3374994	3394044	3394830	3385176	3370259	3.23
80	4496729	4525204	4527779	4510903	4494850	6.08
100	5620305	5669362	5665803	5639437	5619115	9.42
200	Na	Na	Na	Na	11231001	27.47
400	Na	Na	Na	Na	22456368	62.27

注: 表 2 中, Na 指文献中未进行仿真计算

从表 2 看出, 相比其他算法, 本文基于 CPLEX 求解器的计算结果均优于表 2 中列出的其他算法, 400 机 24 时段求解时间仅用 62.27 s, 因此本文的方法适合求解大规模机组组合问题, 计算效率较高。

### 2.2 考虑网络约束和启停爬坡约束

本文对 30 节点算例和 118 节点算例进行考虑网络和启停爬坡约束的机组组合优化, 30 节点和 118 节点算例数据分别参照文献[17]和文献[5], 启停爬坡率取机组的最小出力。文献[17]和文献[5]考虑了污染物排放, 而本文没有考虑, 故本文的计算结果与文献[17]和文献[5]的计算结果没有可比性, 结果如表 3。

表 3 不同算例的求解结果  
Tab.3 Results of different examples

算例规模	是否考虑网络约束	耗时 / s	总费用 / \$	间隙 / %
30 节点	否	0.23	12 755.06	0.01
6 机 24 时段	是	1.09	12 900.26	0.01
118 节点	否	45.11	851 414.34	0.05
54 机 24 时段	是	289.36	856 016.75	0.05

图 4 为 118 节点 54 机 24 时段算例考虑网络安全约束时的对偶间隙收敛曲线。

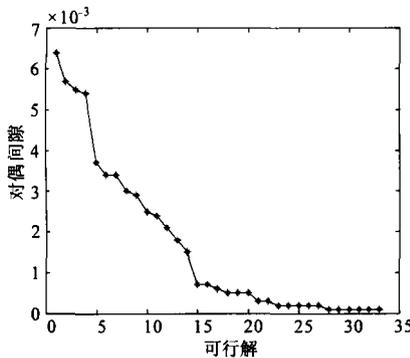


图 4 对偶间隙收敛曲线

Fig.4 Convergent curve of dual gap

从图 4 可以看出, 迭代过程中收敛很快, 找到第 5 个可行解的时候对偶间隙就已经达到 0.37% 了, 已经找到了较满意的解, 但是在之后寻找更优解或最优解的过程中, 需要较多的迭代次数, 如迭代终止条件设定为对偶间隙 *Gap* 达到 0.05%, 计算时间为 289.36 s, 总费用为 856 016.75 \$, 表 4 列出了 118 节点算例考虑网络安全和启停爬坡约束情况下

*Gap* 取一系列不同值对应的目标函数和计算时间。

表 4 不同对偶间隙的求解结果

Tab.4 Results of different dual gap

对偶间隙设定值 / %	耗时 / s	总费用 / \$
1.00	22.27	858 076.63
0.50	32.39	856 649.40
0.20	97.05	856 233.26
0.10	170.27	856 233.25
0.05	289.36	856 016.75
0.01	698.13	855 830.91

分析表 4 可知, 对偶间隙设定为 0.50% 和 0.01% 的求解时间相差甚远, 前者为 32.39 s, 后者为 698.13 s, 但是两者的目标函数仅相差 818.49 \$, 占总费用的比例为 0.096%, 为了同时兼顾求解时间和求解精度, 对偶间隙设定为 0.50% 较为合理。

### 3 结论

本文给出并设计有效地线性化方法, 对传统机组组合模型目标函数分段线性化, 通过启停爬坡约束的线性化, 启动费用的线性化约束处理, 以及基于直流潮流模型的网络安全约束, 建立了考虑多约束的线性混合整数规划的机组组合模型。在此基础上, 采用 CPLEX 求解器进行求解。不同测试算例研究表明, 本文的方法能够求解较大规模网络约束机组组合问题, 计算精度合理, 速度快, 算法稳定。本文不足之处是尚不能考虑交流潮流模型, 未能计及网损, 这将作进一步深入研究。

### 参考文献

[1] Senjyu T, Shimabukuro K, Uezato K, et al. A fast technique for unit commitment problem by extended priority list[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18 (2): 882-888.

[2] 王成文, 韩勇, 谭忠富, 等. 一种求解机组组合优化问题的降维半解析动态规划方法[J]. 电工技术学报, 2006, 21 (5): 110-116.

WANG Cheng-wen, HAN Yong, TAN Zhong-fu, et al. Dimension-reduced semi-analytical dynamic programming approach for solving unit commitment problem[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2006, 21 (5): 110-116.

[3] 王承民, 郭志忠, 于尔铿. 确定机组组合的一种改进的动态规划方法[J]. 电网技术, 2001, 25 (5): 20-24.

WANG Cheng-min, GUO Zhi-zhong, YU Er-keng. An improved dynamic programming method for determining unit commitment[J]. Power System Technology, 2001,

- 25 (5): 20-24.
- [4] Cheng Chuan-ping, Liu Chihwen, Liu Chun-chang. Unit commitment by lagrangian relaxation and genetic algorithm[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2000, 15 (2): 707-714.
- [5] Fu Yong, Li Zu-yi. Security-constrained unit commitment with AC constraints[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20 (3): 1538-1550.
- [6] Weerakorn Ongsakul, Nit Petcharak. Unit commitment by enhanced adaptive lagrangian relaxation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2004, 19 (1): 620-628.
- [7] 张炯, 刘天琪, 苏鹏, 等. 基于遗传粒子群混合算法的机组组合优化[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37 (9): 25-29.
- ZHANG Jiong, LIU Tian-qi, SU Peng, et al. Unit commitment optimization based on genetic algorithm and particle swarm optimization hybrid algorithm[J]. Power System Protection and Control, 2009, 37 (9): 25-29.
- [8] Juste K A, Kita H, Tanak A E, et al. An evolutionary programming solution to the unit commitment problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1999, 14 (4): 1452-1459.
- [9] 李鹏飞, 都洪基, 郭亮, 等. 基于免疫算法的火电厂机组优化组合[J]. 继电器, 2007, 35(增刊): 365-368.
- LI Peng-fei, DU Hong-ji, GUO Liang, et al. Combinatorial optimization section of the thermal power plant based on immune algorithm[J]. Relay, 2007, 35 (S): 365-368.
- [10] Marcelino Madrigal, Victor H Quintana. Semidefinite programming relaxations for {0, 1} power dispatch problems[C]. //IEEE Power Eng Soc Summer Meeting Conf. Edmonton(Canada): 1999: 697-702.
- [11] 韦化, 吴阿琴, 白晓清. 一种求解机组组合问题的内点半定规划法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28 (1): 35-40.
- WEI Hua, WU A-qin, BAI Xiao-qing. An interior point semidefinite programming for unit commitment problems[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28 (1): 35-40.
- [12] 李晓磊, 周京阳, 于尔铿, 等. 基于动态搜索线性混合整数法的机组组合新算法[J]. 电力系统自动化, 2008, 32 (21): 18-21.
- LI Xiao-lei, ZHOU Jing-yang, YU Er-keng, et al. Linear mixed integer programming algorithm for unit commitment based on dynamic search[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32 (21): 18-21.
- [13] Miguel Carrión, José M. A computationally efficient mixed-integer linear formulation for the thermal unit commitment problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2006, 21 (3): 1371-1378.
- [14] Chang G W, Aganagic M, James G, et al. Experiences with mixed integer linear programming based approaches on short-term hydro scheduling[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2001, 16 (4): 743-749.
- [15] Venkatesh B, Jamtsho T, Gooi H B. Unit commitment—a fuzzy mixed linear programming solution[J]. Generation Transmission & Distribution IET, 2007, 5 (1): 836-846.
- [16] A software package for mixed integer linear programming, version 12.1.0[EB/OL]. <http://tomopt.com/tomlab/>.
- [17] Raglend I Jacob, Padhy Narayana Prasad. Solutions to practical unit commitment problems with operational, power flow and environmental constraints[C]. //IEEE Power Engineering Society General Meeting, 2006.

收稿日期: 2009-09-15; 修回日期: 2009-11-04

作者简介:

苏济归 (1984-), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统优化与电力市场; E-mail: [sjg2008@ncepu.edu.cn](mailto:sjg2008@ncepu.edu.cn)

舒隽 (1974-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为电力市场和电力系统分析相关理论及其应用;

谢国辉 (1981-), 男, 博士研究生, 研究方向为电力市场、电力系统优化调度理论和方法。

(上接第 134 页 continued from page 134)

- [11] 朱亚明, 郑玉平, 叶锋, 等. 间断角原理的变压器差动保护的性能特点及微机实现[J]. 电力系统自动化, 1996, 20 (11): 36-40.
- ZHU Ya-ming, ZHENG Yu-ping, YE Feng, et al. Performance and digital realization of transformer differential relay based on dead angle philosophy[J]. Automation of Electric Power Systems, 1996, 20 (11): 36-40.

收稿日期: 2009-09-27; 修回日期: 2009-11-25

作者简介:

刘小宝 (1979-), 男, 硕士, 从事电力系统继电保护研究开发工作; E-mail: [liuxiaobao@sgepri.sgcc.com.cn](mailto:liuxiaobao@sgepri.sgcc.com.cn)

吴崇昊 (1974-), 男, 博士, 从事电力系统继电保护研究开发工作;

宋艳 (1981-), 女, 硕士, 从事电力系统继电保护研究开发工作。