第38卷 第14期 电力系统保护与控制 Vol.38 No.14
2010年7月16日 Power System Protection and Control Jul. 16, 2010

# 基于加窗递推DFT算法的快速相位差校正法研究

许 珉[1]，张文强[1]，王兆强[2]，安 庆[2]

（1.郑州大学电气工程学院，河南 郑州 450002；2.周口供电公司，河南 周口 466000）

**摘要：**计算谐波的相位差校正法利用间隔一个周期的两段连续 $N$点时域采样信号并进行两次 $N$点 FFT 变换，利用其对应离散谱线的相位差计算出频率变化量对幅值和相位进行校正。为了减少两次 FFT 运算量和提高实时性，采用了加余弦窗的递推DFT 算法并利用间隔一个采样周期的两次 DFT 变换计算其对应离散谱线的相位差。由于加 Blackman-harris 窗函数的频谱泄漏影响小计算精度高，为了提高计算精度，采用加 Blackman-harris 窗截断，结合 Blackman-harris 窗的幅值修正系数公式可以准确校正幅值。为进一步提高计算速度，在计算幅值修正系数时还利用了嵌套形式的三次样条函数。通过仿真计算结果可以看出，频率误差小于 0.000 1 Hz，幅值误差小于 0.02%，相位误差小于 0.5%，具有较高的精度。

**关键词：**相位差校正法；递推 DFT 算法；Blackman-harris 窗；频谱泄漏；三次样条函数

**Fast phase difference correction method by using recursive DFT with Blackman-harris window**

XU Min[1]，ZHANG Wen-qiang[1]，WANG Zhao-qiang[2]，AN Qing[2]

（1.School of Electrical Engineering，Zhengzhou University，Zhengzhou 450002，China；
2. Zhoukou Power Supply Company，Zhoukou 466000，China）

**Abstract：**A new method，phase difference correction method，is presented to correct the frequency and phase by separating the continuous time-domain signal into two segments and making FFT respectively，then correct the phase difference of corresponding discrete spectral lines. For minimizing the enormous computational complexity of FFT，the method uses recursive DFT，which makes the computation more simplified．The Blackman-harris window has small influence of frequency spectrum leakage，and the results of computation are consicer than before．So Blackman-harris window is adopted．The amplitude can be rectified using the formula of window function，and spectral analysis is also used for improving the calculation precision. The results show that the frequency error is less than 0.0001 Hz, amplitude error less than 0.02%,and phase error less than 0.5%..

**Key words：**phase difference correction method； recursive DFT algorithm； Blackman-harris window； spectrum leakage； cubic spline

中图分类号： TM744 文献标识码：A 文章编号： 1674-3415(2010)14-0001-04

## 0 引言

用FFT计算周期信号必须加窗截断，取一个或多个整周期，这必然产生频谱泄漏[1-5]。当进行电量测量时，如果采样频率不等于基波频率的整倍数，计算得到的是泄漏的频谱（栅栏效应），得不到信号的精确值，计算存在误差，而相角误差更大，因此必须想办法对频谱进行校正以提高精度。以固定不变的采样频率进行谱分析时，常用加窗插值FFT算法和相位差校正法对频谱进行校正。相位差校正法是通过对间隔一个周期的两段连续$N$点离散信号进行谱分析得到对应谱线的相位差和频率变化量，对谐波幅值和相位进行校正。当加窗FFT算法截断数据长度$N$很大时，谱分析的计算量会很大，这样实时性会受到很大的影响；针对相位差校正法的这一缺点，提出了基于计算量不随采样点数增加的加窗递推DFT算法和间隔一个采样周期的两次DFT变换计算其对应离散谱线相位差的相位差校正法。Blackman-harris窗函数[6]的频谱泄漏影响小，本文采用加Blackman-harris窗递推DFT算法有效地提高相位差校正法算法的计算精度。另外，由于加Blackman-harris窗的幅值修正系数计算公式复杂，幅值校正运算量较大，故在计算幅值修正系数时采用了三次样条函数，再次减少了运算量。

## 1 加余弦窗递推FFT算法

### 1.1 递推DFT算法

FFT算法大大提高了DFT的计算量，但用于在

线计算采用递推DFT算法[7]速度更快，以采样频率$f_s$对模拟信号$x(t)$进行采样得到离散序列$x(n)$，根据$N$点离散傅里叶变换定义得$t_{r-1}$时刻的DFT为

$$X^{r-1}(k)=\sum_{n=r-N}^{r-1}x(n)W_N^{k(n-r+N)}$$

$$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}，k=0\sim N-1$$

$t_r$时刻的DFT与$t_{r-1}$时刻的DFT之间的关系为：

$$X^r(k)=\sum_{n=r-N+1}^{r}x(n)W_N^{k(n-r+N-1)}=W_N^{-k}\sum_{n=r-N+1}^{r}x(n)W_N^{k(n-r+N)}=$$
$$[X^{r-1}(k)+x(r)-x(r-N)]W_N^{-k}$$

其中：$k$为第$k$条谱线，$k$=0、1、2…$N$−1。可以看出递推FFT算法的运算量大大减少了。但上式实际上是加矩形窗的递推算法，相当于将采样窗向后移动一个采样点。由于矩形窗窗谱的旁瓣峰值较大，最大旁瓣衰减为13 dB，这种算法不能很好地抑制旁瓣引起的谱间干扰。

### 1.2 加Blackman-harris窗递推DFT算法

利用递推FFT算法求出$X(k)$，然后在频域加窗[8]，余弦窗的一般表达式如下：

$$w_i(n)=\sum_{i=0}^{K}(-1)^i a_i\cos\left(\frac{2\pi}{N}in\right)\quad n=0，1,\cdots,N-1$$

设$x(n)$为实序列，其中$n$=0，1,…,$N$−1，加余弦窗FFT变换与加矩形窗FFT变换之间的关系为：

$$X_i(k)=\mathrm{DFT}[x(n)w_i[n]]=$$
$$\mathrm{DFT}\{x(n)\sum_{i=0}^{K}(-1)^i a_i\cos\left(\frac{2\pi}{N}in\right)\}=$$
$$\mathrm{DFT}\{x(n)\sum_{i=0}^{K}(-1)^i a_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}in}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}in})/2\}=$$
$$\sum_{i=0}^{K}(-1)^i a_i\frac{X(k+i)+X(k-i)}{2}$$

加Blackman_Harris窗时取$K$=3，$a_0$=0.358 75，$a_1$=0.488 29，$a_2$=0.141 28，$a_3$=0.011 68。

## 2　改进的相位差校正法

### 2.1 改进相位差校正法原理

文献[9]所述相位差校正法采用间隔一个周期的两段$N$点采样值，进行两次FFT变换后，求出各次谐波相位经过一个周期后的变化量，该变化量对应频率的变化量，该方法的缺点是：（1）计算量大；（2）由于频谱泄漏的影响，计算误差较大；（3）响应速度较慢。本文所述相位差校正法采用间隔一个采样周期的两段$N$点采样值，并且为提高计算速度和精度，采用加窗递推FFT算法计算两次FFT变换，求出各次谐波相位经过一个采样周期后的变化量，利用该变化量求出对应频率的变化量。下面以单频率信号为例进行分析，设$x(t)=A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0t+\theta_0)}$，$A_\mathrm{m}$为幅值，实际频率$f_0=(k+\Delta k)\frac{f_\mathrm{s}}{N}$，它在频率$k\times F$和$(k+1)\times F$之间，$k$为整数，其中频率分辨率$F=1/(NT_\mathrm{s})=f_\mathrm{s}/N$，$T_\mathrm{s}$为采样时间间隔，$0<\Delta k<1$。对原始信号两段样本，每段信号采样$N$点，第一段信号的离散形式为

$$x(n)=A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0nT_\mathrm{s}+\theta_0)}R_N(n)=$$
$$A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi(k+\Delta k)n/N+\theta_0]}R_N(n)$$

第二段信号的离散形式为

$$x(n+1)=A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi f_0(n+1)T_\mathrm{s}+\theta_0]}R_N(n)=$$
$$A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f_0nT_\mathrm{s}+2\pi f_0T_\mathrm{s}+\theta_0)}R_N(n)=$$
$$A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi(k+\Delta k)f_\mathrm{s}/NnT_\mathrm{s}+2\pi(k+\Delta k)f_\mathrm{s}/NT_\mathrm{s}+\theta_0]}R_N(n)=$$
$$A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}[2\pi(k+\Delta k)n/N+2\pi(k+\Delta k)/N+\theta_0]}R_N(n)$$

式中，$\theta_0$、$\theta_1$为初相角。可以看出它们之间的关系为

$$\theta_1=2\pi(k+\Delta k)/N+\theta_0$$

$$\theta_1-\theta_0=2\pi k/N+2\pi\Delta k/N \tag{1}$$

设两段信号的加Blackman-harris窗的递推DFT分别为$X_\mathrm{H}^{r-1}(k)$和$X_\mathrm{H}^{r}(k)$，其中$X_\mathrm{HR}^{r-1}(k)$，$X_\mathrm{HI}^{r-1}(k)$和$X_\mathrm{HR}^{r}(k)$，$X_\mathrm{HI}^{r}(k)$分别是$x$（$n$）和$x$（$n$+1）序列在第$k$条谱线处频谱值的实部和虚部。根据三角公式，频率偏移量计算方法如下：

$$\tan(\theta_1-\theta_0)=\frac{X_\mathrm{HR}^{r-1}(k)X_\mathrm{HI}^{r}(k)-X_\mathrm{HR}^{r}(k)X_\mathrm{HI}^{r-1}(k)}{X_\mathrm{HR}^{r-1}(k)X_\mathrm{HR}^{r}(k)+X_\mathrm{HI}^{r-1}(k)X_\mathrm{HI}^{r}(k)}$$

根据式（1）得

$$\tan(\theta_1-\theta_0)=\tan(\frac{2\pi}{N}k+\frac{2\pi}{N}\Delta k)=$$
$$\frac{\tan(\frac{2\pi}{N}k)+\tan(\frac{2\pi}{N}\Delta k)}{1-\tan(\frac{2\pi}{N}k)\tan(\frac{2\pi}{N}\Delta k)} \tag{2}$$

由式（2）可以解得

$$\tan(\frac{2\pi}{N}\Delta k)=\frac{\tan(\theta_1-\theta_0)-\tan(\frac{2\pi}{N}k)}{1+\tan(\theta_1-\theta_0)\tan(\frac{2\pi}{N}k)}$$

考虑到频率偏移量对应的相位角度很小，可得

$$\Delta k\approx\frac{\tan(\theta_1-\theta_0)-\tan(\frac{2\pi}{N}k)}{1+\tan(\theta_1-\theta_0)\tan(\frac{2\pi}{N}k)}\times\frac{N}{2\pi}\qquad(3)$$

由式（3）可以看出，本文采用间隔一个采样周期的 DFT 计算频率偏移量的计算方法，$\tan(\theta_1-\theta_0)$ 由 $X_{\mathrm{HR}}^{r-1}(k)$，$X_{\mathrm{HI}}^{r-1}(k)$ 和 $X_{\mathrm{HR}}^{r}(k)$，$X_{\mathrm{HI}}^{r}(k)$ 计算，$\tan(\frac{2\pi}{N}k)$ 为已知，可以事先算出，为一常数，因此该方法不需要进行三角函数的运算，故运算量小，易于汇编语言实现。

## 2.2 频率校正

频率的校正为 $f=(k+\Delta k)\frac{f_{\mathrm{s}}}{N}$ 。

## 2.3 相位校正

根据加窗插值 FFT 算法可以得到相位的校正公式为 $\theta=angle[X_{\mathrm{H}}^{r-1}(k)]-\Delta k\times\pi$ 。

## 2.4 幅值校正

利用加Blackman-harris窗插值FFT算法的复振幅的修正函数（频谱泄漏函数）进行幅值校正：

$$A=\frac{\sin(\Delta k\,\pi)}{\pi}\times\frac{-0.00006\Delta k^6+0.02913\Delta k^4-1.22511\Delta k^2+12.915}{\Delta k(1-\Delta k^2)(4-\Delta k^2)(9-\Delta k^2)}$$

幅值的求解公式为

$$A_m=|X_{\mathrm{H}}^{r-1}(k)|/A$$

为了进一步提高计算速度，可以采用三次样条函数逼近复振幅的修正函数，用它的有效形式[10-11]计算频率修正系数和复振幅的修正系数，计算量小，实时性好，在分段处连续，且为精确值，大大提高了加 Blackman-Harris 窗相位差校正法算法的计算速度，较好地解决了计算精度高与计算速度慢的矛盾，便于它的广泛应用。

# 3　仿真计算及分析

设某电压的基波幅值为 380 V，相位为 5°，并含有幅值为 60 V 、相位为 15° 的 3 次谐波，幅值为 15 V 、相位为 25° 的 5 次谐波，即

$u(t)$=380cos（2π×*ft*+5°）+60cos（2π×3×*ft*+15°）+15cos（2π×5×*ft*+25°）

如果以固定不变的采样频率 1 600 Hz 对电压进行采样，采样（截断）点数为 128 点，对采样数据分别用加 Blackman-harris 窗插值 FFT 算法，计算结果见表 1、表 2。

**表 1 利用相位差校正法加 Blackman-harris 窗递推 FFT 插值算法的幅值计算结果**

Tab.1 Amplitude calculated result of Blackman-harris by using phase difference correction method

| 频率 / Hz | 频率计算值 | 基波 | | 三次谐波 | | 五次谐波 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 幅值 | 误差 / % | 幅值 | 误差 / % | 幅值 | 误差 / % |
| 49.5 | 49.499 9 | 380.001 7 | −0.000 435 | 59.998 6 | 0.002 346 | 14.998 4 | -0.010 67 |
| 49.8 | 48.799 9 | 380.000 6 | −0.000 16 | 59.999 6 | −0.000 67 | 14.999 6 | -0.002 667 |
| 50.2 | 51.000 1 | 379.999 5 | −0.000 131 | 60.000 2 | −0.000 33 | 15.000 1 | -0.000 67 |
| 50.5 | 50.500 1 | 379.998 8 | 0.003 041 | 60.000 | 0.000 029 | 15.000 0 | 0.000 323 |

**表 2 利用相位差校正法加 Blackman-harris 窗递推 FFT 算法的相位计算结果**

Tab.2 Phasic calculated result of Blackman-harris by using phase difference correction method

| 频率 / Hz | 基波 | | 三次谐波 | | 五次谐波 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 相位 | 误差 / % | 相位 | 误差 / % | 相位 | 误差 / % |
| 49.5 | 5.002 | −0.040 78 | 14.975 4 | 0.16 | 24.919 8 | 0.32 |
| 49.8 | 5.000 7 | −0.014 | 14.989 6 | 0.07 | 24.966 8 | −0.13 |
| 50.2 | 4.999 4 | −0.012 00 | 15.010 4 | −0.069 | 25.027 | −0.11 |
| 50.5 | 4.998 7 | −0.026 93 | 15.024 4 | −0.16 | 25.045 | −0.18 |

通过仿真计算结果可以看出，基于加 Blackman-harris 窗递推 FFT 算法的相位差校正法幅值

误差小于 0.02%，相位误差小于 0.5%，具有较高的精度。如果信号中存在间谐波，可以通过增加加窗 FFT 变换的采样点数（周期数）来减小间谐波对计算精度的影响。

## 4 小结

本文提出基于加 Blackman-harris 窗的递推 DFT 算法并利用间隔一个采样周期的两次 DFT 变换计算其对应离散谱线的相位差的快速相位差校正法算法。该算法用于电力系统谐波测量时，计算精度高，易于实现，计算量小，计算速度快，提高了实时性，较好地解决了文献[9]所述相位差校正法的缺点，适用于电力系统谐波的高精度测量以及各种测控设备，具有较好的应用前景。

### 参考文献


[1] 薛蕙，杨仁刚. 基于FFT 的高精度谐波检测算法[J] . 中国电机工程学报，2002，22（12）：106-110.
XUE Hui，YANG Ren-gang. Precise algorithms for harmonic analysis based on FFT algorithm[J]. Proceedings of the CSEE，2002，22（12）：106-110.

[2] 张伏生，耿中行，葛耀中. 电力系统谐波分析的高精度 FFT 算法[J]. 中国电机工程学报，1999，19（3）: 63-66.
ZHANG Fu-sheng，GENG Zhong-xing，GE Yao-zhong. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in power system[J]. Proceedings of the CSEE，1999，19（3）: 63-66.

[3] Smith C C，Dahl J F， Thornhill R J. The duality of leakage and aliasing and improved digital spectral analysis techniques[J]. Trans of ASME，Journal of Dynamic Systems，Measurement，and Control，1996，118：741-747.

[4] 庞浩，李东霞，俎云霄，等. 应用FFT进行电力系统谐波分析的改进算法[J]. 中国电机工程学报， 2003，23（6）：50-54.
PANG Hao，LI Dong-xia，ZU Yun-xiao，et al. An improved algorithm for harmonic analysis of power system using FFT technique[J]. Proceedings of the CSEE，2003.23（6）：50-54.

[5] 肖雁鸿，毛筱，周靖林，等. 电力系统谐波测量方法综述[J]. 电网技术，2002，26（6）：61-64.
XIAO Yan-hong，MAO Xiao，ZHOU Jing-lin，et al. A survey on measuring method for harmonics in power system[J]. Power System Technology，2002，26（6）：61-64.

[6] 赵文春，马伟明，胡安. 电机测试中谐波分析的高精度FFT算法[J]. 中国电机工程学报，2001，21（12）：83-87.
ZHAO Wen-chun，MA Wei-ming，HU An. FFT algorithm with high accuracy for harmonic analysis in the electric machine[J]. Proceedings of the CSEE，2001，21（12）：83-87.

[7] 忻黎敏，许维胜，余有灵. 基于递推离散傅里叶变换和同步采样的谐波电流实时检测方法[J]. 电网技术，2008，32（6）：14-18.
XIN Li-min，XU Wei-sheng，YU You-ling. A real-time harmonic current detection method based on recursive discrete fourier transform and synchronous sampling[J]. Power System Technology，2002，26（6）：14-18.

[8] 赵正敏，吴乐南. 余弦窗DFT递推算法[J]. 通信学报 2001，11（11）：124-127.
ZHAO Zheng-min，WU Le-nan. Recursive DFT with poly-cosine window[J]. Journal of China Institute of Communication，2001，11（11）：124-127.

[9] 谢明，张晓飞，丁康. 频谱分析中用于相位和频率校正的相位差校正法[J]. 振动工程学报，1999，12（4）：454-459.
XIE Ming，ZHANG Xiao-fei，DING Kang. A phase Difference correction method for phase and frequency correction in spectral analysis[J]. Journal of Vibration Engineering，1999，12（4）：454-459.

[10] 许珉，刘凌波. 基于三次样条函数的加Blackman-harris窗插值FFT算法[J]. 电力自动化设备，2009，29（2）：59-63.
XU Min，LIU Ling-bo. Blackman-harris windows interpolated FFT algorithm based on cubic spline function[J]. Electric Power Automation Equipment，2009，29（2）：59-63.

[11] Kincaid D, Cheney W. 数值分析[M]. 王国荣，俞耀明，徐兆亮, 译. 北京：机械工业出版社，2005.
Kincaid D, Cheney W. Numerical analysis[M]. WANG Guo-rong，YU Yao-ming，XU Zhao-liang, trans. Beijing: China Machine Press，2005.


收稿日期：2009-09-01； 修回日期：2009-10-22

作者简介：

许 珉（1956-），男，教授，从事电气设备故障诊断及数字信号处理等方面的研究；E-mail：xumin@zzu.edu.cn

张文强（1975-），男，硕士研究生，从事数字信号处理等方面的研究。