电力系统暂态稳定性数值计算的几种新方法及其比较

汪芳宗，何一帆

（三峡大学电气信息学院，湖北 宜昌 443002）

摘要：将辛几何算法及辛代数动力学算法两类新的方法引入电力系统暂态稳定性数值计算。以一个简单的电力系统为例，通过数值实验将新方法与电力系统分析中常用的隐式梯形积分法及传统的 Runge-Kutta 方法进行了对比分析。初步的数值实验结果表明，辛几何算法及辛代数动力学算法与传统算法相比，在计算精度和数值稳定性方面具有较为明显的优势，因而更适合于电力系统暂态稳定性及相似问题的数值计算。

关键词：电力系统；暂态稳定性；数值积分方法；辛几何算法；代数动力学方法

Several new numerical methods and their comparative studies for power system transient stability analysis

WANG Fang-zong，HE Yi-fan

(China Three Georges University，Yichang 443002，China)

Abstract: In this paper, the sympletic geometry algorithm and the sympletic algebraic dynamics method are introduced into the numerical calculation of power system transient stability. Through numerical simulation tests on a simple power system, the sympletic geometry algorithm and the sympletic algebraic dynamics method are compared with the implicit trapezoidal rule and classical Runge-Kutta methods, which are adopted conventionally for power system transient stability analysis. The tested results show that, the sympletic geometry algorithm and the sympletic algebraic dynamics method have the advantages both in calculation accuracy and in numerical stability respectively over the classical Runge-Kutta methods and implicit trapezoidal rule, therefore these new methods should be more suitable to numerical analysis of transient stability and other like-wise problems.

Key words: power system; transient stability; numerical integration method; symplectic geometry algorithm; algebraic dynamics method

中图分类号：TM744　　文献标识码：A　　文章编号：1674-3415(2009)23-0015-05

0 引言

数值积分方法是电力系统暂态稳定性分析计算的基本方法。迄今为止，电力系统暂态稳定性计算最常用的数值积分方法大致包括隐式梯形积分法（Implicit Trapezoidal Rule）以及 Runge-Kutta 方法。隐式梯形积分法数值稳定性较好，可以采用较大的步长，但在每一步的积分过程中一般需要迭代求解。Runge-Kutta 方法是一种显式积分方法，计算过程较快，但数值稳定性相比较而言较弱。

近年来，研究人员已提出了不少新的数值积分算法。其中，一类是著名的辛几何算法[1~6]（以下简称辛算法）；另一类是辛代数动力学算法[7~9]。辛算法是由我国已故著名学者冯康及其研究小组，针对 Runge-Kutta 算法不能保持 Hamiltonian 系统的辛几何结构以及具有人为耗散等缺点而提出的。这一算法的提出为 Hamiltonian 系统，同时也是为微分方程数值方法的研究提供了一个崭新的领域和广阔的空间。迄今为止，辛算法已在科学和工程的很多领域得到了成功的应用。辛算法的最大优点就是保结构特征，即保辛。保辛的优点在数值计算中的具体体现就是数值计算的稳定性和准确性。

辛代数动力学算法是将辛几何方法与代数动力学方法相结合的一种算法。简单地解释，代数动力学算法就是基于 Taylor 级数展开的一类数值积分方法[7,8]。对于可积系统，代数动力学算法能比较方便地求得其解析解。对于不可积系统，可以求得用分片收敛的 Taylor 级数表示的局域解析解；在这个基础上对 Taylor 级数做有限项截断近似就可以获得系统的数值解。由于电力系统暂态过程所存在的“刚性”问题，传统的代数动力学算法不太适合于暂态稳定性的数值计算。文献[9]利用时间平移算子的性质，采用辛几何方法，设计出了能保持局域辛几何结构的代数动力学算法，也就是本文所述的辛代数动力学算法。文献[9]已证明了辛代数动力学算法具有一些独特的优势。

本文从实际应用的角度出发，将辛 Runge-Kutta 算法[2,4,6]、可分 Hamiltonian 系统的显辛算法[2,6]、辛代数动力学算法[9]等几种新的数值积分方法用于一个测试系统的暂态稳定性计算，通过测试及对比分析，初步验证了几种新的算法具有一定的优势，可推广用于电力系统暂态稳定性及其它领域的数值计算。

1 辛几何算法

辛算法较传统的非辛算法具有很多优越性，主要表现为：传统的数值积分即差分方法基于稳定性、收敛性等诸多因素的考虑，不可避免地引入人为的耗散机制等，从而歪曲了原来系统的特征，而辛算法具有能够保持原来系统结构特征的优点，特别是能够长时间稳定地进行数值跟踪模拟，这意味着辛算法可以采用更大的积分步长。

关于辛算法的研究成果很丰富。限于主题，本文只介绍辛 Runge-Kutta 算法[4]以及可分 Hamiltonian 系统的显辛算法[2]。

1.1 辛 Runge-Kutta 方法

对给定的常微分方程初值问题

$$\dot{x} = F(t,x), F(0) = y_0 \tag{1}$$

其 s 级、$2s$ 阶的辛 Runge-Kutta 算法的一般形式为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h\sum_{j=1}^{s} b_j F(t_k + c_j h, y_j) \\ y_i = x_k + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} F(t_k + c_i h, y_j), i \in (1,s) \end{cases} \tag{2}$$

式中：h 为步长，其中系数 a_{ij}，b_j，c_j 满足下列关系式：

$$\begin{cases} c_j \ge 0, \sum_{j=1}^{s} c_j = 1, \sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \sum_{j=1}^{s} b_j = 1, i,j \in (1,s) \\ b_i b_j - a_{ij} b_i - a_{ji} b_j = 0; i,j \in (1,s) \end{cases} \tag{3}$$

文献[4]已导出了构造任意级（也就是任意阶）辛 Runge-Kutta 算法的方法和相应的计算公式，即系数 a_{ij}，b_j，c_j 的计算方法。与传统的 Runge-Kutta 方法不同，辛 Runge-Kutta 方法均是隐式的。研究人员已经证明：Euler 中点积分法就是一种 1 级、2 阶辛 Runge-Kutta 算法，但隐式梯形积分法不是辛算法。

很易理解：1 级、2 阶辛 Runge-Kutta 算法的计算量与隐式梯形积分法基本相当，s 级的辛 Runge-Kutta 方法的计算量差不多是后者的 s 倍。但是，s 级的辛 Runge-Kutta 算法具有 $2s$ 阶的精度，其一步的积分过程可以同时求出 $s+1$ 个时间点（$t_n + c_1 h, \cdots, t_n + c_s h, t_{n+1}$）上的结果。因此，多级、高阶辛 Runge-Kutta 方法相对于传统的低阶、非辛算法具有类似于时间并行计算的效果：多级相当于多步；每增加 1 级就相当于增加了 1 个时间并行度。

1.2 可分 Hamiltonian 系统的显辛算法

从式(3)可知，对于一般的 Hamiltonian 系统，不存在显式易于执行的辛格式。但对于可分 Hamiltonian 系统，研究人员已构造出了它的 m-阶显辛算法。所谓可分 Hamiltonian 系统，即是其能量函数可以相互分离为 $H(p,q) = U(p) + V(q)$。设可分 Hamiltonian 系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{p} = f(q) \\ \dot{q} = g(p) \end{cases} \tag{4}$$

则 m-阶显辛算法为

$$\begin{cases} p_0 = p_k, q_0 = q_k \\ p_{i+1} = p_i + h\alpha_{i+1} f(q_i) \\ q_{i+1} = q_i + h\beta_{i+1} g(p_{i+1}) \\ p_{k+1} = p_m, q_{k+1} = q_m \end{cases}, i \in (0, m-1) \tag{5}$$

其中：α_i，β_i 是系数。当 $m=1$ 时，有

$[\alpha_1 \quad \beta_1] = [1 \quad 1]$

当 $m=2$ 时，有

$[\alpha_1 \quad \alpha_2] = [1/2 \quad 1/2]$，$[\beta_1 \quad \beta_2] = [1 \quad 0]$

当 $m=3$ 时，有

$$\begin{cases} [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = [7/24 \quad 3/4 \quad -1/24] \\ [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = [2/3 \quad -2/3 \quad 1] \end{cases}$$

当 $m=4$ 时，有

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \alpha_4 = (1+\gamma)/3,\ \alpha_3 = -(2+\gamma)/3 \\ \beta_1 = \beta_4 = (2+\gamma)/6,\ \beta_2 = \beta_3 = (1-\gamma)/6 \\ \gamma = \sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

很显然，上述显辛算法易于执行，与同阶的传统 Runge-Kutta 方法相比，其计算过程更为简捷。

2 辛代数动力学方法

传统的代数动力学算法是显式算法。显式算法一般数值稳定性较弱，不太适合于“刚性”问题的求解。文献[9]借鉴辛几何算法的思想，建立了隐式代数动力学算法，而且证明了这种算法对 Hamiltonian 系统是严格保持局域辛结构的，因而将这种称为辛代数动力学算法。

常用的辛代数动力学算法主要有 2 阶算法和 4 阶算法。2 阶辛代数动力学算法可表述为

$$[I - \frac{h}{2}\hat{L}(x)]x_{k+1} = [I + \frac{h}{2}\hat{L}(x)]x_k \tag{6}$$

式中：$\hat{L}$ 为微分算子。

$$\hat{L}(x)x_k = \dot{x}_k = F(x_k)$$

因此，2 阶辛代数动力学算法即是常用的隐式梯形积分法，即

$$x_{k+1}=x_k+\frac{1}{2}h[F(x_k)+F(x_{k+1})] \tag{7}$$

4 阶辛代数动力学算法可表述为

$$[I-\frac{h}{2}\hat{L}(x)+\frac{h^2}{12}\hat{L}^2(x)]x_{k+1}=$$
$$[I+\frac{h}{2}\hat{L}(x)+\frac{h^2}{12}\hat{L}^2(x)]x_k \tag{8}$$

式中：

$$\hat{L}^2(x)x_k=\hat{L}(\dot{x})\dot{x}_k=\frac{\partial F}{\partial x_k}F(x_k)$$

定义

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}=D(x_k)=[D_{ij}],D_{ij}=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

则式(8)成为

$$x_{k+1}-\frac{h}{2}F(x_{k+1})+\frac{h^2}{12}D(x_{k+1})F(x_{k+1})=$$
$$x_k+\frac{h}{2}F(x_k)+\frac{h^2}{12}D(x_k)F(x_k) \tag{9}$$

若系统是可分的，则有

$$D=\begin{bmatrix}0 & \partial f/\partial q\\ \partial g/\partial p & 0\end{bmatrix} \tag{10}$$

由式(9)可知，4 阶辛代数动力学算法每一步求解的运算量比 2 阶方法大，但与辛 Runge-Kutta 方法有所不同的是：在辛 Runge-Kutta 方法体系中，4 阶算法的运算量大约相当于 2 阶算法的运算量的 2 倍，这是因为在用牛顿法求解离散化后的非线性方程组时，4 阶算法所产生的雅可比矩阵的维数是 2 阶算法的 2 倍；在辛代数动力学算法中，4 阶算法（式(9)）所产生的雅可比矩阵的维数与 2 阶算法（式(7)）是一样的。若系统是可分的，则 4 阶辛代数动力学算法的运算量比 2 阶算法只是略大一些。

3　算法理论分析

如上所述，辛算法是针对 Hamiltonian 系统所建立和发展起来的一种新方法。电力系统暂态稳定性计算，即使采用经典模型，它也不是一个 Hamiltonian 系统。但是，辛算法“同样适用于耗散系统”[3]，亦即适用于非 Hamiltonian 系统。事实上，Euler 中点积分法作用一种辛算法，是比较适合于暂态稳定性的数值计算的。因此，辛算法用于暂态稳定性计算是否具有优势，这是值得研究的。

另外一个问题是关于显辛算法的问题。显辛算法适用性的一个基本前提条件，就是系统的状态变量应具有可分性。在采用复杂模型的情况下，电力系统暂态稳定性计算在数学模型上一般是不可分的。但是，在采用经典模型的情况下，电力系统暂态稳定性计算在数学模型上确实是一个可分系统。众所周知，采用经典模型的电力系统暂态稳定性计算可用下列方程描述[10]：

$$\begin{cases}\dot{\delta}_i=\omega_i\\ M_i\dot{\omega}_i=P_{\mathrm{mi}}-P_{\mathrm{ei}}\end{cases},\ i\in(1,n) \tag{11}$$

式中：

$$P_{ei}=E_i^2G_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(E_iE_jB_{ij}\sin\delta_{ij}+E_iE_iG_{ij}\cos\delta_{ij}) \tag{12}$$

从式(11)和(12)可以看出：发电机的功角（δ）和其角频率（ω）两者的运动方程是完全可分的，即 $\dot{\delta}$ 的表达式中只含 ω 这一状态变量，而 $\dot{\omega}$ 的表达式中只含 δ 这一状态变量。因此，在采用经典模型的情况下，可以尝试将可分 Hamiltonian 系统的显辛算法用于电力系统暂态稳定性的数值计算。

数值积分算法的好坏，主要是看数值积分算法的数值稳定性、计算精度和计算速度。计算精度主要取决于数值积分算法的阶数，阶数愈高，数值积分算法的截断误差就愈小，但阶数的提高也同时会增加每一步积分过程中的计算量。在采用相同的步长情况下，同阶的不同数值积分算法的计算精度也不尽一致，具体情况只能通过数值算例进行对比分析，因为截断误差很难用一个精确的表达式来描述。数值稳定性是数值积分算法的一个非常重要的特性。数值稳定性不仅影响到可用的积分步长的大小，而且还影响到数值积分的精度，因为数值稳定性对截断误差的累积有直接的影响。

利用传统的数值稳定性分析方法[10]，可以证明：Euler 中点积分法、隐式梯形积分法以及 4 阶辛代数动力学算法均是 A 稳定的，但对于显辛算法以及高阶辛 Runge-Kutta 方法，很难具体分析其数值稳定性。按辛几何代数的观点，辛算法能够保持原动力学系统的所有线性守恒律，部分辛算法例如显辛算法还能保持原可分系统的所有二次守恒律[3]。线性守恒律在动力学系统中的具体体现就是运动轨道的几何保真。换言之，辛算法由于满足所有线性守恒律，所以能够长时间抑制截断误差的积累。辛代数动力学算法是局域保辛的，其算法格式也能抑制截断误差的积累，但长时间跟踪稳定性不如辛算法。

关于计算速度，一般情况下显式积分方法比隐式积分方法要快一些，但隐式积分方法通常具备更好的数值稳定性，因而可以采用更大的积分步长。因此，不同类型的积分算法难于比较，只能是比较同类型（即隐式和显式两类）的算法。

基于上述考虑，本文主要研究特别是比较 Euler 中点积分法和隐式梯形积分法、比较显辛算法和传

统的 Runge-Kutta 方法，以及比较 4 阶辛代数动力学算法和 4 阶辛 Runge-Kutta 方法。

4　暂态稳定性数值计算结果及比较

算例系统采用一个简单的 3 机 9 节点电力系统[11]。暂态稳定性计算采用经典模型。故障设定为 7 号母线发生三相接地短路，故障持续时间为 $\Delta t_{\mathrm{f}} = 0.10$ s，此时系统处于稳定状态。为便于对比分析，以 $h = 0.001$ s 时发电机相对功角 $\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$ 的计算结果为基准（此时步长很小，不同算法的计算结果基本上是一样的），跟踪观察不同算法的误差曲线。

图 1 是 $h = 0.05$ s 时 Euler 中点积分法及隐式梯形积分法的误差曲线。从图 1 可以看出：在相同的步长条件下，Euler 中点积分法的计算精度更好。实验中发现，在任何相同的步长条件下，Euler 中点积分法的计算精度均优于隐式梯形积分法。

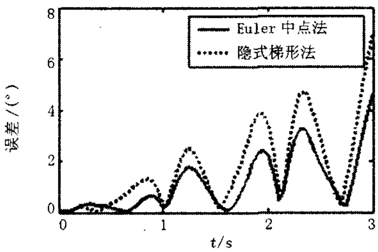

图 1　Euler 中点法与隐式梯形法的误差曲线比较

Fig. 1　Error trajectories comparison of Euler mid-point rule and implicit trapezoidal rule(h=0.05s)

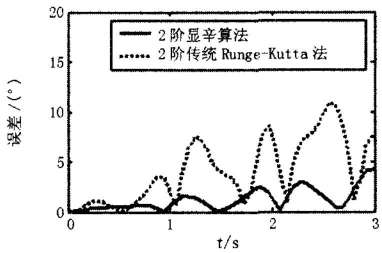

图 2　2 阶显辛算法与 2 阶传统 Runge-Kutta 方法的误差曲线比较

Fig. 2 Error trajectories comparison of explicit sympletic rule and traditional Runge-Kutta method(m=2,h=0.06s)

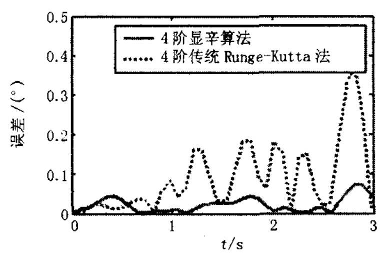

图 3　4 阶显辛算法与 4 阶传统 Runge-Kutta 方法的误差曲线比较

Fig. 3　Error trajectories comparison of explicit sympletic rule and traditional Runge-Kutta method(m=4,h=0.08s)

图 2（m=2, h=0.06 s）和图 3（m=4, h=0.08 s）是显辛算法及传统 Runge-Kutta 方法的误差曲线。从图 2 和图 3 可以看出：在相同的步长条件下，显辛算法的计算精度比同阶的传统 Runge-Kutta 方法更好一些。

图 4 和图 5 分别是 $h = 0.08$ s 和 $h = 0.10$ s 时 4 阶辛 Runge-Kutta 方法及 4 阶辛代数动力学算法的误差曲线。从图 4 和图 5 可以看出：在相同的步长条件下，同阶的辛算法比辛代数动力学算法的计算精度更好；即使在采用大步长的情况下，两种新算法特别是辛算法仍具有很好的计算精度，这从一个侧面反映了辛算法能够长时间稳定地进行数值跟踪计算的优点。

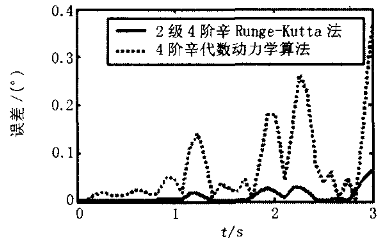

图 4　4 阶辛 Runge-Kutta 方法与 4 阶辛代数动力学算法的误差曲线比较(h=0.08 s)

Fig. 4　Error trajectories comparison of symplectic Runge-Kutta method and symplectic algebraic dynamics method(h=0.08s)

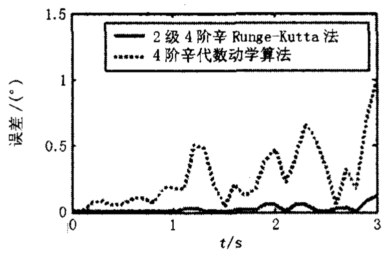

图 5　4 阶辛 Runge-Kutta 方法与 4 阶辛代数动力学算法的误差曲线比较(h=0.10 s)

Fig. 5　Error trajectories comparison of symplectic Runge-Kutta method and symplectic algebraic dynamics method(h=0.10 s)

对比图 1 和图 5 可以看出：在 2 倍的步长条件下，4 阶辛 Runge-Kutta 方法的计算精度仍然比 2 阶辛 Runge-Kutta 方法即 Euler 中点积分法更好；4 阶辛代数动力学算法的计算精度仍然比 2 阶辛代数动力学算法即隐式梯形积分法更好。此外，在数值试验中，4 级、8 阶辛 Runge-Kutta 方法在采用 $h = 0.8$ s 的极大步长情况下，仍能获得较好的计算精度。

5　结束语

本文将辛几何算法及辛代数动力学算法两类

新的数值积分方法引入电力系统暂态稳定性数值计算领域，以一个简单的电力系统为例，将新方法与传统的算法进行了对比分析。根据初步的数值实验结果，可以得出以下几个结论：

1）Euler 中点积分法是辛算法；隐式梯形积分法不是辛算法，是一种局域保辛的辛代数动力学算法。Euler 中点积分法与隐式梯形积分法相比，两者同型、同阶，计算量相当，但 Euler 中点积分法具有更好的计算精度。

2）对于可分系统，显辛算法与传统的 Runge-Kutta 方法相比，两者计算量相当，但显辛算法在计算精度和数值稳定性方面具有较明显的优势。因此，对于采用经典模型的暂态稳定性计算，显辛算法是一种更为有效的新方法。

3）辛代数动力学算法的计算精度不如同阶的辛几何算法，但高阶辛代数动力学算法比同阶的辛几何算法的计算速度更快一些。在采用大步长同时对计算精度要求较高的情况下，4 阶辛代数动力学算法是一种较好的新方法。

4）多级、高阶辛 Runge-Kutta 算法具有内在的时间并性特性，而且它在级数增加的同时能够保持阶数的同比增长。这与传统的时间并行计算完全不一样：用隐式梯形积分法进行时间并行计算时，不论时间并行度如何，该方法永远只能是 2 阶的。正是因为辛 Runge-Kutta 算法能够保持阶数与级数之间的同比增长，所以，s 级、$2s$ 阶的辛 Runge-Kutta 算法在采用 s 倍于 Euler 中点积分法所用步长的情况下，仍能够保持或获得比后者更高的计算精度。

参考文献

[1] Feng K. Difference Schemes for Hamiltonian formalism and Symplectic Geometry[J]. J Comput Math，1986，4(3)：279-289.

[2] 秦孟兆. 辛几何及计算哈密顿力学[J]. 力学与实践，1990，12(6)：1-20.
QIN Meng-zhao. Symplectic Geometry and Computational Hamiltonian Mechanics[J]. Mechanics and Engineering，1990，12(6)：1-20.

[3] Feng K，Qin M Z. Hamiltonian Algorithms for Hamiltonian Dynamical Systems[J]. Progress in Natural Science，1991，1(2)：105-116.

[4] Sun G. Construction of High Order Symplectic Runge-Kutta Methods[J]. J Comput Math，1993,11(3)：250-260.

[5] 冯康,秦孟兆. Hamilton系统的辛几何算法[J]. 杭州：浙江科技出版社，2003.
FENG Kang，QIN Meng-zhao. Symplectic Methods for the Computation of Hamiltonian Systems[M]. Hangzhou:Zhejiang Scientific Press，2003.

[6] 孔令华. 一些非线性发展方程(组)的辛和多辛算法[D]. 合肥：中国科学技术大学，2007.
KONG Ling-hua. Symplectic and Multi-symplectic Algorithms to Some Nonlinear Evolution Equations[D]. Hefei:University of Science and Technology of China，2007.

[7] Wang S J，Zhang H. Algebraic Dynamics Solutions and Algebraic Dynamics Algorithm for Nonlinear Ordinary Differential Equations[J]. Science of China(Series G)，2006，49(6)：716-728.

[8] Wang S J，Zhang H. Algebraic Dynamics Algorithm: Numerical Comparison with Runge-Kutta Algorithm and Symplectic Geometric Algorithm[J]. Science of China(Series G)，2007，50(1)：53-69.

[9] Wang S J，Zhang H. Symplectic Algebraic Dynamics Algorithm[J]. Science of China(Series G)，2007，50(2)：133-143.

[10] 倪以信，陈寿孙，张宝霖. 动态电力系统的理论和分析[M]. 北京：清华大学出版社，2002.

[11] Anderson P M，Fouad A A. Power System Control and Stability[J]. Iowa：The Iowa State University Press，1977.

收稿日期：2008-12-03；　修回日期：2009-01-19

作者简介：

汪芳宗(1966-)，男，博士，教授，主要从事电力系统自动化及电工新技术应用研究；E-mail: fzwang@ctgu.edu.cn

何一帆(1984-)，男，硕士研究生，主要从事电力系统分析计算与控制的研究。

（上接第 14 页　continued from page 14）

JU Ping，XIE Huan，MENG Yuan-jing，et al. Online Identification of Low-frequency Oscillation Based on Wide-area Measurements[J]. Proceedings of the CSEE，2005，25(22)：56-60(in Chinese).

[18] Kundur P. Power System Stability and Control[M]. McGraw-Hill Inc，1994.

收稿日期：2009-07-16；　修回日期：2009-08-31

作者简介：

赵礼杰（1962-），男，本科，讲师，长期从事电力系统自动化专业课程的教学与研究工作。E-mail: 787357498@qq.com