

# 基于小波—数学形态学和 Hilbert 的谐波分析

周喜超, 刘峻, 郑伟, 智勇

(甘肃电力科学研究院, 甘肃 兰州 730050)

**摘要:** 充分利用小波和数学形态学的优势, 有效地将两者结合, 再用 Hilbert 变换来提取谐波的幅值和频率, 有效地克服了 FFT 方法和相位分析方法的缺点。首先将谐波信号进行小波分解, 得到一系列小波系数, 再对每一层的小波系数利用数学形态学进行平滑处理, 最后通过对小波变换产生的每个频率分量对应的波形进行 Hilbert 变换及拟和计算, 得到谐波的幅值、相位和频率, 实现了对电力系统谐波的准确分析。仿真表明, 该方法能够准确地检测出电力系统谐波, 具有很好的实用价值。

**关键词:** 小波变换; 数学形态学; Hilbert; 谐波

## Harmonics analysis based on wavelet - mathematical morphology and Hilbert

ZHOU Xi-chao, LIU Jun, ZHENG Wei, ZHI Yong

(Gansu Electric Power Research Institute, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** A new method that interfuses wavelet transform with mathematical morphology and Hilbert is proposed to detect harmonics. Disadvantages of FFT and phasic analysis method are effectively overcome. First, harmonics signal are analyzed with wavelet transform, the modulus of a series of wavelet are dealt with mathematical morphology, then the value, phase and frequency of harmonics are gained by Hilbert and summation count. Simulation reveals that the proposed method can precisely detect the harmonic and be well used in practice.

**Key words:** wavelet transform; mathematical morphology; Hilbert; harmonics

中图分类号: TM71 文献标识码: A 文章编号: 1674-3415(2009)16-0020-04

## 0 引言

随着电力系统的不断发展, 系统中谐波危害一直是个十分严重的问题, 所以对电力系统谐波的分析 and 治理具有很强的社会、经济效益<sup>[1-3]</sup>。传统的谐波分析方法有快速傅立叶变换(FFT)和短时傅立叶变换(STFT)<sup>[4-7]</sup>。FFT 方法由于存在频谱泄漏和栅栏效应, 因此存在较大误差。加窗插值算法通过窗函数使频谱泄漏得到有效的控制, 但是由于其时频窗的宽度固定, 不能自适应地调整, 因此这种算法往往以降低频率分辨率为代价, 如果谐波信号中再存有很强的噪声污染, 上面方法的准确度就会更差。小波变换<sup>[5]</sup>具有多分辨率分析的特点, 在时、频域内均具有良好的局部化特性, 同时能改变频率分辨率和时间分辨率, 小波变换被誉为分析信号的数学显微镜, 为了克服 FFT 和 STFT 算法的局限性, 近年来小波变换被应用到谐波计算中, 并取得了很好的效果<sup>[8-11]</sup>。

数学形态学运算只需要进行加、减法和取极大值或极小值等运算, 易于硬件实现, 且在处理信号

时只取决于待处理信号的局部形态特征, 具有很好的消噪和平滑作用。本文充分利用小波变换的优势, 并结合数学形态学的优点对谐波信号进行处理, 最后再利用 Hilbert 变换实现幅值、相位和频率的提取。通过仿真分析, 可以看出本文的方法具有很高的精度和很好的实用价值。

## 1 谐波计算方法

### 1.1 小波变换分频

小波变换是一种信号的时间-尺度(时间-频率)分析方法, 它具有多分辨率分析(Multiresolution Analysis)的特点, 在时域和频域都具有表征信号局部特征的能力, 是一种窗口大小固定不变但其形状(时间窗和频率窗)都可以改变的时频局部化分析方法。即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率, 在高频部分具有较低的时间分辨率和较高的时间分辨率。由于谐波信号含有很多除基频以外的频率成分, 小波变换则能有效地把每个频率分量都提取出来, 具体过程如下:

(1) 选择合适的小波基函数和适当的尺度 $j$ ,

将含有噪声的谐波信号 $S(t)$ 进行 $N$ 层小波分解,提取各层的小波系数 $W_T(j,k)$ ;

(2) 对各尺度下的小波系数 $W_T(j,k)$ 进行分支重构处理后得到谐波信号 $W_T^0(j,k)$ 。

### 1.2 数学形态学消噪

数学形态学<sup>[12,13]</sup>的基本思想是在考察信号时设计一种收集信号信息的“探针”,称为结构元素(相当于滤波窗),在信号中不断移动结构元素,便可提取有用的信息做特征分析和描述,达到提取信号、保持细节和抑制噪声的目的。形态变换一般分为二值形态变换和多值形态变换,多值形态变换也称灰度变换。

假设输入的序列 $f(n)$ 是定义在 $\{0,1,\dots,N-1\}$ 上的离散函数,而结构元素 $g(n)$ 为定义在 $\{0,1,\dots,M-1\}$ 上的离散函数,且 $N \geq M$ , $N,M$ 分别为其长度,则 $f(n)$ 关于 $g(n)$ 的腐蚀(erosion)和膨胀(dilation)分别定义为

$$(f \ominus g)(n) = \min[f(n+m) - g(m)]$$

$$(m \in 0,1,2,\dots,M-1) \quad (1)$$

$$(f \oplus g)(n) = \max[f(n-m) + g(m)]$$

$$(m \in 0,1,2,\dots,M-1) \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得 $f(n)$ 关于 $g(n)$ 的开运算和闭运算分别为

$$(f \circ g)(n) = (f \oplus g \oplus g)(n) \quad (3)$$

$$(f \bullet g)(n) = (f \ominus g \ominus g)(n) \quad (4)$$

数学形态学的开运算可用于滤除信号上方的峰值噪声,去除信号边缘的毛刺、孤立斑点及小桥结构;闭运算可用于平滑或抑制信号下方的波谷噪声,填补信号的漏洞和裂缝。因此基于形态学的开、闭运算可构造开-闭滤波器、闭-开滤波器、混合滤波器和交替混合滤波器。通常开-闭滤波器和闭-开滤波器虽然可同时滤除信号的正负脉冲噪声,但存在着统计偏移现象,开运算的收缩性导致开-闭滤波器输出幅度较小,而闭运算的扩张性导致闭-开滤波器输出幅度较大。为解决信号输出的偏移现象,一般选用混合滤波器和交替混合滤波器。

利用数学形态学混合滤波器,选择扁平型的结构元素对分频后的谐波信号 $W_T^0(j,k)$ 进行消噪,去除谐波中的噪声污染,使计算结果更加精确。

### 1.3 Hilbert 变换提取谐波参数

电力系统谐波信号可表示为

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (5)$$

式中: $A_i$ 、 $\omega_i$ 、 $\phi_i$ 分别为谐波的幅值、频率和相位。

将 $f(t)$ 进行HT后得到的解析信号为

$$z(t) = f(t) + jH[f(t)] = A(t)e^{-j\theta(t)} \quad (6)$$

式中: $H$ 为HT算子。

对于一般工程问题,幅值 $A(t)$ 及相位 $\theta(t)$ 可表示为

$$A(t) = A_0 \quad (7)$$

$$\theta(t) = \omega_d t + \phi_0 \quad (8)$$

式中: $\omega_d$ 可以通过对 $[\theta(t)-t]$ 的斜率求得, $\phi_0$ 为式(8)截距,而 $A_0$ 也可以由式(7)得到。 $A_0$ 及 $\omega_d$ 可通过最小二乘拟和方法得到最终结果。

### 1.4 计算流程

图1为本算法流程示意图。

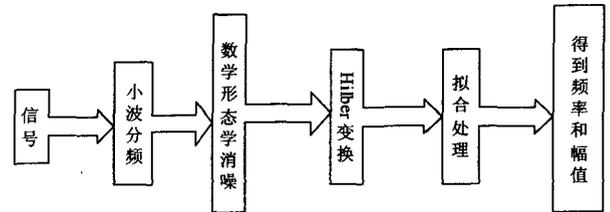


图1 算法流程

Fig. 1 Harmonic identification flow chart

## 2 仿真分析

### 2.1 算例1

采用文献[14]中的算例1。仿真信号为: $\sin 230\pi t + \sin 480\pi t + \sin 800\pi t$ 。利用Matlab7.0进行仿真,采样频率为3200 Hz,即每个周波采样64点,加上一定程度的噪声,如图2所示。将 $f(t)$ 进行小波分解重构,通过数学形态学平滑处理的各个分量如图3所示。

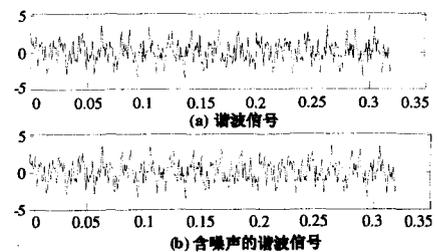


图2 谐波信号

Fig. 2 Harmonic signal

图2中(a)代表一含有谐波的电压信号,(b)为在该信号中加入一定的噪声。对各个谐波分量进行Hilbert变换。图3代表分解后每个频率分量,也

就是说每个分量是含有一个频率的电压波形。拟合求出频率和幅值，检测结果如表 1 所示。为了体现本文方法的高精度，将结果与文献[14]进行了比较，从表中可以看出，FFT 方法和相位法的频率检测的平均误差为 3.52%和 2.87%，幅值平均误差分别为 29.800%和 1.667%。而本文方法检测的平均精度分别为 0.059%和 0.4%，充分证明了本文方法的优越性。

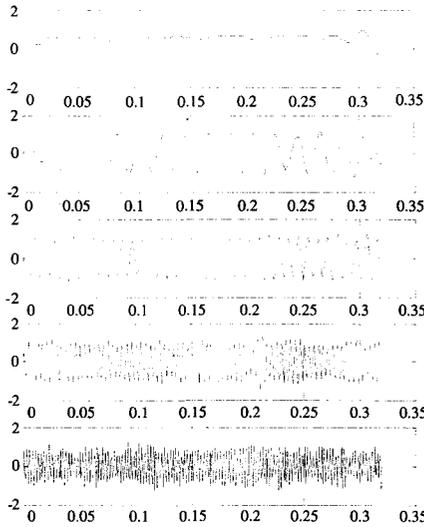


图 3 分频得出各个分量

Fig.3 Analyze frequency of every weight

表 1 计算结果  
Tab.1 Result of calculation

FFT 算法		相位法		本文方法	
频率/Hz	幅值/V	频率/Hz	幅值/V	频率/Hz	幅值/V
112.5	0.78	114.59	0.99	115.02	0.994 5
118.75	0.48				
237.5	0.75	240.07	1.01	240.38	1.005
243.75	0.51				
400	0.99	399.79	1.03	400.00	0.998 7

### 2. 2 算例 2

为更好地说明本文的谐波分析方法，采用文献

表 2 检测结果

Tab.2 Result of detection

幅值/A				频率/Hz			
原始信号	FFT	prony	本文方法	原始信号	FFT	prony	本文方法
64.933	65.014	66.13	64.356	25	26	25	24.96
100	99.914	100	100.34	50	51	50	50.01
74.813	74.291	75.09	74.891	125	126	123.7	124.96

### 3 结论

本文将小波变换和数学形态学相结合有效地将

[15]中的实际电弧炉电流信号。

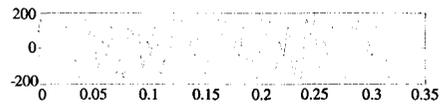


图 4 电流信号

Fig.4 Current signal

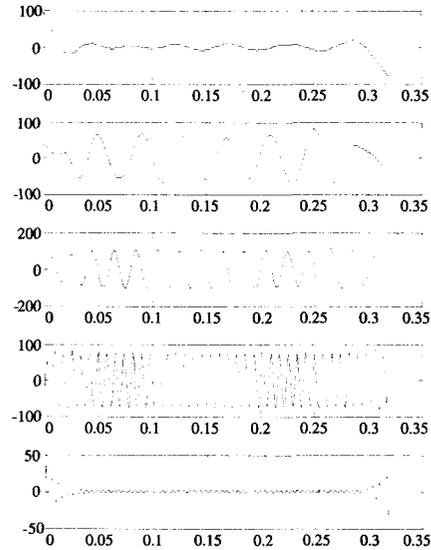


图 5 分频得出各个分量

Fig.5 Analyze frequency of every weight

图 4 代表一含有谐波的电弧炉电流信号。对各个谐波分量进行 Hilbert 变换，图 5 代表分解后每个频率分量，也就是说每个分量是含有一个频率的电流波形。拟合求出频率和幅值。用本文方法检测的结果如表 2 所示，同文献[15]的辨识结果进行比较。可以看出，FFT 方法和 prony 方法幅值检测的平均精度分别为 0.32%和 0.73%，频率检测的平均精度为 2.26%和 0.35%，本文检测结果分别为 0.44%和 0.07%，可见本文检测的幅值和 FFT 方法相当，频率远高于 FFT 方法。

电力系统谐波自适应的分离出来，结果优于 FFT、prony 及相位法等方法。同时采用 Hilber 计算幅值和频率，具有很高精度。仿真证明本文的方法能准

确地检测出系统谐波,具有很好的实用价值。

### 参考文献

- [1] 刘安定,肖先勇,邓武军.基于离散余弦变换和小波变换的电能质量扰动信号检测方法[J].电网技术,2005,29(10):70-75.  
LIU An-ding, XIAO Xian-yong, DENG Wu-jun. Detection and Analysis of Power Quality Disturbance Signal Based on Discrete Cosine Transform and Wavelet Transform[J]. Power System Technology, 2005, 29(10): 70-75.
- [2] 何为,杨洪耕.基于第二代小波变换和矢量量化理论的电能质量扰动分类方法[J].电网技术,2007,31(12):82-87.  
HE Wei, YANG Hong-geng. Power Quality Disturbances Classification Based on Second Generation of Wavelet Transform and Vector Quantization Theory [J]. Power System Technology, 2007, 31(12): 82-87.
- [3] 肖雁鸿,毛筱,周靖林.电力系统谐波测量方法综述[J].电网技术,2002,26(6):61-66.  
XIAO Yan-hong, MAO Xiao, ZHOU Jing-ling. A Survey on Measuring Method for Harmonics in Power System[J]. Power System Technology, 2002, 26(6): 61-66.
- [4] 刘敏,王克英.基于快速傅里叶变换与误差最小原理的谐波分析方法[J].电网技术,2006,30(19):76-79.  
LIU Min, WANG Ke-ying. A Harmonic Analysis Method Based on Fast Fourier Transform and Minimal Error Principle [J]. Power System Technology, 2006, 30(19): 76-79.
- [5] 张斌,孙静.基于Mallat算法和快速傅里叶变换的电能质量分析方法[J].电网技术,2007,31(19):35-41.  
ZHANG Bin, SUN Jing. A Power Quality Analysis Method Based on Mallat Algorithm and Fast Fourier Transform[J]. Power System Technology, 2007, 31(19): 35-41.
- [6] 庞浩,李东霞,殂云霄,等.应用FFT进行电力系统谐波分析的改进算法[J].中国电机工程学报,2003,23(6):50-54.  
PANG Hao, LI Dong-xia, ZU Yun-xiao, et al. An Improved Algorithm for Harmonic Analysis of Power System Using FFT Technique[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(6): 50-54.
- [7] 薛惠,杨仁刚.基于FFT的高精度谐波检测算法[J].中国电机工程学报,2002,22(12):106-110.  
XUE Hui, YANG Ren-gang. Precise Algorithms for Harmonic Analysis based on FFT Algorithm[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(12): 106-110.
- [8] 柴旭峥,习文山,关根志,等.一种高精度的电力系统谐波分析算法[J].中国电机工程学报,2003,23(9):67-70.  
CHAI Xu-zheng, WEN Xi-shan, GUAN Gen-zhi, et al. An Algorithm with High Accuracy for Analysis of Power System Harmonics[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(9): 67-70.
- [9] 薛惠,杨仁刚.利用Morlet连续小波变换实现非整数谐波的检测[J].电网技术,2002,26(12):41-44.  
XUE Hui, YANG Ren-gang. Morlet Wavelet Based Detection of Noninteger Harmonics[J]. Power System Technology, 2002, 26(12): 41-44.
- [10] 李天云,杨梅,周喜超,等.基于小波变换和数学形态学的局部放电信号分析方法[J].电网技术,2007,31(6):56-61.  
LI Tian-yun, YANG Mei, ZHOU Xi-chao. Method of Partial Discharge Signal Analysis Based on Wavelet Transform and Mathematical Morphology [J]. Power System Technology, 2007, 31(6): 56-61.
- [11] 薛惠,杨仁刚,罗红.利用小波包变换实现电力系统谐波分析[J].电网技术,2004,28(5):41-46.  
XUE Hui, YANG Ren-gang, LUO Hong. Power System Harmonic Analysis Using Wavelet Packet Transform[J]. Power System Technology, 2004, 28(5): 41-46.
- [12] 尹文琴,刘前进.数学形态学在电力系统中的应用综述[J].继电器,2007,35(19):76-83.  
YIN Wen-qin, LIU Qian-jin. Mathematical Morphology Review and Its Applications in Power System [J]. Relay, 2007, 35(19): 76-83.
- [13] 杨明玉,王世旭,张举.基于数学形态学梯度的快速选相方案[J].电网技术,2006,30(7):64-68.  
YANG Ming-yu, WANG Shi-xu, ZHANG Ju. A High-speed Phase Selection Scheme Based on Mathematical Morphology Gradient [J]. Power System Technology, 2006, 30(7): 64-68(in Chinese).
- [14] 赵成勇,何明锋.基于复小波变换相位信息的谐波检测算法[J].中国电机工程学报,2005,25(1):38-42.  
ZHAO Cheng-yong, HE Ming-feng. A Novel Method for Harmonic Measurement Using Phase Information of Complex Wavelet Transform[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(1): 38-42(in Chinese).
- [15] 李天云,赵妍,李楠,等.基于HHT的电能质量检测新方法[J].中国电机工程学报,2005,25(17):52-56.  
LI Tian-yun, ZHAO Yan, LI Nan, et al. A Method for Power Quality Detection Based on HHT[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(17): 52-56(in Chinese).

收稿日期:2008-06-08; 修回日期:2009-06-13

作者简介:

周喜超(1982-),男,工程师,从事电能质量及电力系统自动化方面的研究;E-mail:zhouxichao82@tom.com

刘峻(1972-),男,高级工程师,从事电力系统稳定及电能质量方面的研究;

郑伟(1973-),男,高级工程师,从事电能质量及励磁系统的研究。