具有三阶收敛速度的潮流算法

孙志媛[1]，孙 艳[2]，宁文辉[3]

（1. 广西电力试验研究院有限公司，广西 南宁 530023； 2. 广西大学电气工程学院，广西 南宁 530004）

摘要： 首次系统地推导了几个具有三阶收敛速度的牛顿类迭代法的多变量矩阵求解格式，并将它们应用于电力系统潮流计算。文中对 IEEE14-300 节点测试系统和一个实际系统共 7 个算例进行了仿真测试，结果表明，这些算法具有良好的收敛特性，并且在达到同样精度要求的情况下，它们较之经典牛顿法需要较少的迭代次数。尤其是，算法 1 和算法 5 由于在每步迭代中充分利用了 Jacobian 矩阵三角分解的因子表，提高了潮流计算的速度。最后指出，这些算法在潮流计算中的应用是对潮流计算方法的拓展，本文的研究为这些算法在电力系统中的进一步应用开辟了道路。

关键词： 电力系统；潮流计算；Newton 迭代法；三阶收敛性

Power flow algorithm with cubic convergence

SUN Zhi-yuan[1], SUN Yan[2], NING Wen-hui[1]

(1.Guangxi Electric Power Test & Research Institute Co., Ltd, Nanning 530023, China;

2. School of Electrical Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: In this paper, multivariate matrix calculation formulations of several Newton-like iterative methods with cubic convergence are systematically derived for the first time, then applied them into power flow calculation in electric power systems. Extensive numerical simulations on the test systems that range in size from IEEE14 to 300 buses and a practical life system show that these algorithms have the excellent convergence characteristics, and more, in the same convergence tolerance, these algorithms need less iterative numbers than classical Newton iterative method. Especially, algorithm No.1 and algorithm No.5 make the most of the factorization tables of the Jacobian matrix in each iterative step, so, the speeds of power flow calculation are obviously improved. Lastly, this paper draws a conclusion that these algorithms are the extension to classical Newton iterative method, and the study of this paper makes a routine for applying them into electric power systems.

Key words: power system; power flow calculation; Newton iteration method; cubic convergence

中图分类号： TM74　　文献标识码：A　　文章编号： 1674-3415(2009)04-0005-04

0 引言

电力系统潮流计算是电力系统中应用最为广泛、最基本和最重要的一种电气计算，它是分析电力系统的稳态和动态性能的基础和出发点[1,2]。随着电力系统规模的日益扩大以及安全分析等在线计算问题的提出，对潮流计算的速度提出了越来越高的要求[1]。因此研究快速的潮流算法是电力系统本身发展的需要，国内外的学者对此进行了广泛的研究，并提出了许多有益的改进[3~6]。在数学上，电力系统潮流计算可以描述为非线性代数方程组的求解问题。

即潮流计算问题可以描述为：

$$F(x)=0 \qquad (1)$$

其中 $F:R^n \rightarrow R^n$。

即：$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (2)$

牛顿法是求解非线性方程组重要、基本的方法。在电力系统潮流计算中，基于 Newton 迭代法的潮流计算自采用稀疏技巧求解以来，以其计算速度快、收敛性能好，得到了广泛的应用，国内外学者在牛顿法的基础上提出了很多有效的求解电力系统问题的算法[7~11]。已经证明了 Newton 迭代法求解非线性代数方程组具有二阶收敛速度[12,13]。其多变量迭代格式为：

$$\begin{cases}\Delta x^{(k)}=-[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})\\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}\end{cases} \qquad (3)$$

若采用求解线性方程组的形式，其等价形式为：

$$\begin{cases}[F^{'}(x^{(k)})]\Delta x^{(k)}=-F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}\end{cases} \tag{4}$$

式中：$F^{'}(x^{(k)})$ 是函数 $F(x)$对变量 x 的一阶偏导数矩阵在 $x^{(k)}$的矩阵值，即 Jacobian 矩阵。k 为迭代次数。

近年来，非线性代数方程组的求解问题在数学上有了很大的进展。其中最为显著的是在牛顿法的基础上提出了一些具有三阶收敛速度的牛顿类迭代算法，而其中的一类不需要求解二阶导数的算法为各行业的实际应用提供了有效可行的途径。在这样的背景下，本文探讨了其中的一些优秀算法在电力系统潮流计算中的应用。然而，这些理论上已经给出严格证明的算法通常是以单变量方程的求根形式给出，而实际应用中面对的通常是多变量方程组的形式，故其可操作性较差。对此，本文具体推导了这些算法的多变量方程组的矩阵求解形式，并应用到电力系统潮流计算中。大量的算例分析表明，这些具有三阶收敛性能的算法在潮流计算中是可行的，在达到同样精度要求的情况下，这些算法较之经典的牛顿法需要较少的迭代次数，而其中的算法 1 和算法 5 的计算效率比经典牛顿法有所提高。

1　算法原理

本节给出了五个毋须求解二次导数的具有三阶收敛性能的牛顿类迭代法，具体推导了它们的多变量矩阵求解形式。

算法 1（AM1）：

文献[14]提出的具有三阶收敛性能的修正牛顿法为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k-f(x_k)/f^{'}(x_k))+f(x_k)}{f^{'}(x_k)} \tag{5}$$

该算法的多变量矩阵等价形式可以表示为：

$$\begin{cases}F^{'}(x^{(k)})\Delta x^{(k)}=-F(x^{(k)}) \\ \tilde{x}^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)} \\ F^{'}(x^{(k)})\Delta\tilde{x}^{(k)}=-F(x^{(k)})-F(\tilde{x}^{(k+1)}) \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta\tilde{x}^{(k)}\end{cases} \tag{6}$$

该算法吸取了 Newton 法收敛速度快和简化牛顿法工作量省的优点，在 Newton 迭代法之后实施一次简化牛顿步对其进行校正。在具体实际实施时可以采用如下的预估和校正两步进行。

Step1：用 Newton 迭代法进行预估：

$$\begin{cases}\Delta x^{(k)}=-[F^{'}(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}) \\ \tilde{x}^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)}\end{cases} \tag{7}$$

Step2：对求得的预估值 $\tilde{x}^{(k+1)}$ 进行校正：

$$\begin{cases}\Delta\tilde{x}^{(k)}=-[F^{'}(x^{(k)})]^{-1}\left[F(x^{(k)})+F(\tilde{x}^{(k+1)})\right] \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta\tilde{x}^{(k)}\end{cases} \tag{8}$$

在对预估值 $\tilde{x}^{(k+1)}$ 进行校正时，使用的 Jacobian 矩阵与预估时用到的 Jacobian 矩阵是一样的，充分利用了已经计算的 Jacobian 矩阵以及对 Jacobian 矩阵三角分解的因子表来减少计算量。有些文献把该算法称为预估-校正牛顿法或者两步牛顿法。文献[15]把该算法采用所谓的“三步迭代法”应用非线性方程的求根问题，取得了满意的效果；文献[16,17]从不同的原理推导并证明了该算法的收敛性。该算法是提出的较早的一个具有三阶收敛性能的算法，得到了广泛的研究和应用。但是其后的很长一段时间里，对具有三阶收敛性能算法的研究迟迟没有进展，近几年有了一些突破性的进展，最具代表的是以下几种。

算法 2（AM2）：

文献[18]提出了下面牛顿法的变体，并在单变量的方程下，理论上证明了其至少具有三阶收敛性。其单变量迭代格式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{f^{'}(x_k-f(x_k)/f^{'}(x_k))+f^{'}(x_k)} \tag{9}$$

其多变量矩阵等价形式为：

$$\begin{cases}F^{'}(x^{(k)})\Delta x^{(k)}=-F(x^{(k)}) \\ \tilde{x}^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x^{(k)} \\ (F^{'}(x^{(k)})+F^{'}(\tilde{x}^{(k+1)}))\Delta\tilde{x}^{(k)}=-F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+2\Delta\tilde{x}^{(k)}\end{cases} \tag{10}$$

该算法在每步迭代中充分利用了已经计算的不平衡量 $F(x^{(k)})$，具体应用中也可以分为预估和校正两步进行。

算法 3（AM3）：

文献[19]在总结算法 2 的基础上，推广了文献[18]的算法，提出了下面称为中点法的牛顿法变体，文献[20，21]也独立推出了该算法并严格证明

了其具有三阶收敛性，单变量方程的数值实验也说明了其正确性。文献[22，23]研究了该算法的多变量形式并证明了其收敛性。其单变量迭代格式为：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k - 0.5f(x_k)/(f'(x_k))} \quad (11)$$

其多变量矩阵等价形式可以写成：

$$\begin{cases} F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \\ \tilde{x}^{(k+1)} = x^{(k)} + 0.5\Delta x^{(k)} \\ F'(\tilde{x}^{(k+1)})\Delta\tilde{x}^{(k)} = -F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta\tilde{x}^{(k)} \end{cases} \quad (12)$$

该算法同算法 2 一样，也充分利用了已经计算的不平衡量 $F(x^{(k)})$，具体也分为预估和校正两步进行。

算法 4(AM4)：

文献[24]提出了式（13）的单变量迭代求解格式，并证明了其具有三阶收敛速度。

$$x_{k+1} = x_k - 0.5f(x_k)\left(\frac{1}{f'(x_k - f(x_k)/f'(x_k))} + \frac{1}{f'(x_k)}\right) \quad (13)$$

其多变量矩阵等价形式为：

$$\begin{cases} F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \\ \tilde{x}^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \\ F'(\tilde{x}^{(k+1)})\Delta\tilde{x}^{(k)} = -F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + 0.5(\Delta x^{(k)} + \Delta\tilde{x}^{(k)}) \end{cases} \quad (14)$$

该算法同算法 2 和算法 3 一样，充分利用了已经计算的不平衡量 $F(x^{(k)})$，具体也可分为预估和校正两步进行。

算法 5(AM5)：

文献[25]在文献[18]的基础上提出了如下的单变量迭代格式，并证明了其具有三阶收敛性，其形式为：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k + f(x_k)/f'(x_k)) - f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (15)$$

多变量的矩阵等价形式为：

$$\begin{cases} F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \\ \tilde{x}^{(k+1)} = x^{(k)} - \Delta x^{(k)} \\ F'(x^{(k)})\Delta\tilde{x}^{(k)} = -F(\tilde{x}^{(k+1)}) + F(x^{(k)}) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta\tilde{x}^{(k)} \end{cases} \quad (16)$$

该算法同算法 1 一样在每步迭代中充分利用了已经计算出来的 Jacobian 矩阵以及对 Jacobian 矩阵三角分解的因子表。

2　算例分析

基于以上五个具有三阶收敛性能的牛顿类算法，本文在直角坐标模型下进行了广泛的潮流计算的数值实验，测试系统包括 IEEE14、30、39、57、118、300 节点和一个包含 703 个节点的实际系统。在所有的算例中，均取容许误差 ε =0.000 001(或 0.000 1 MW/MVA)，测试系统的迭代次数和运行时间分别见表 1 和表 2，图 1 和图 2 分别给出了 IEEE118 标准测试系统和实际测试系统的收敛性能曲线。

表 1 测试系统的迭代次数

Tab.1 Iteration numbers of test systems

测试系统	迭代次数					
	Newton	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5
14	3	2	2	2	2	2
30	4	2	2	2	2	2
39	4	2	3	3	2	3
57	4	2	2	2	2	2
118	4	2	3	3	2	3
300	5	4	3	3	3	5
703	5	3	3	3	3	4

表 2 测试系统的运行时间

Tab.2 Running times of test systems

测试系统	运行时间/ms					
	Newton	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5
14	32	31	31	32	47	31
30	63	47	62	62	63	47
39	62	63	63	63	62	47
57	93	78	78	78	63	63
118	78	62	94	94	93	62
300	141	125	129	129	156	156
703	219	203	234	234	265	215

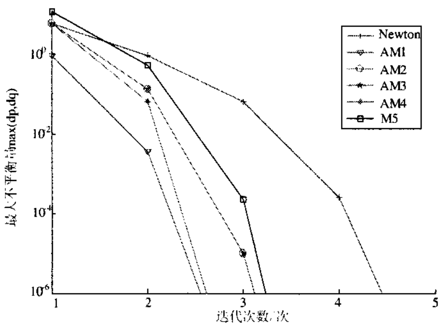

图 1 IEEE118 标准测试系统的收敛过程

Fig.1 Convergence process of IEEE118 standard test system

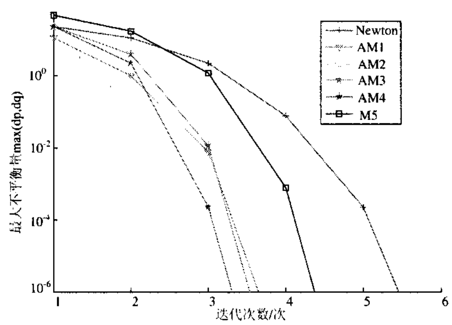

图 2 实际系统的收敛过程

Fig.2 Convergence process of practical life system

根据算法原理以及在电力系统潮流计算中的仿真结果可以得出以下初步结论：

1) 各种具有三阶收敛性能的牛顿类算法在潮流计算中是可行的，并且在达到同样收敛精度的情况下，其迭代次数较之经典牛顿法要少。

2) 各种具有三阶收敛性能的牛顿类算法每步的计算量较之经典牛顿法有所提高。

3) 算法 1 和算法 5 虽然每个迭代步需要计算两次不平衡量，但是每个迭代步仅需计算一次 Jacobian 矩阵，并且充分利用了计算出来的 Jacobian 矩阵以及对 Jacobian 矩阵三角分解的因子表，其整体计算速度较经典牛顿法有了一定的提高。

4) 算法 3 是在算法 2 的基础上的稍许改进，故而它们的迭代次数、计算速度甚至每步计算的结果几乎是完全相同的。

5) 算法 2、算法 3 和算法 4 虽然每迭代步只需计算一次不平衡量，但需要计算两次 Jacobian 矩阵，故而也需要对 Jacobian 矩阵进行两次因子表分解，所以其计算时间较之牛顿法没有实质性的提高。

3 结论

近年来，非线性代数方程组的求解问题取得了一定的突破，特别是提出了一类毋须求解二次导数的并且具有三阶收敛性能的牛顿类迭代法。本文首次系统地将这类算法应用于电力系统潮流计算，具体推导了这些算法的矩阵求解格式，比较了各自的优缺点。大量的算例分析表明，在达到同样精度要求下，它们较之经典牛顿法需要较少的迭代次数。而其中的算法 1 和算法 5 由于在每步迭代中只需计算一次 Jacobian 矩阵，并充分利用了这个 Jacobian 矩阵以及对该 Jacobian 矩阵三角分解的因子表，提高了潮流计算的速度。最后指出，这些算法在潮流计算中的应用是对潮流计算方法的拓展，为这些算法在电力系统中的进一步应用开辟了道路。

参考文献

[1] 诸骏伟.电力系统分析(上册)[M].北京:中国电力出版社,1998

[2] 张伯明,陈寿孙.高等电力网络分析[M].北京:清华大学出版社,1996.

[3] Tinney W F, Hart C E. Power Flow Solution by Newton's Method[J].IEEE Trans on PAS, 1967, 86(11): 1449-1460.

[4] Stott B, Alsac O. Fast Decoupled Load Flow[J]. IEEE Trans on PAS,1974, 93(3):859-869.

[5] Van Amcrongen, Robert A M. A General-purpose Version of the Fast Decoupled Load Flow[J]. IEEE Trans on Power Systems,1989, 108(2):760-770.

[6] Da Costa V M, Martins N, Pereira J L R. Developments in the Newton Raphson Power Flow Formulation Based on Current Injections[J]. IEEE Trans on PWRS, 1999, 14(4):1320-1326.

[7] Zhang F, Cheng C S, et al. A Modified Newton Method for Radial Distribution System Ppower Flow Analysis[J]. IEEE Trans on PWRS, 1997, 12(1): 389- 397.

[8] Iwamoto S, Tamura Y. A Fast Load Flow Method Retaining Nonlinearity[J].IEEE Trans on PAS, 1978, 97(5): 1586 –1599.

[9] Sun D I, Ashley B, Brewer B, et al. Optimal Power Flow by Newton Approach[J].IEEE Trans on PAS,1984, 103 (10):2864-2880.

[10] Ponnambalam K, Quintana V H, Vannelli A. A Fast Algorithm for Power System Optimization Problems Using an Interior Point Method[J].IEEE Trans on PWRS,1992,7(2):892-899.

[11] Iwamoto S, Tamura Y. A Load Flow Calculation Method for Ill Conditioned Power System[J].IEEE Trans on PAS, 1981, 100(4): 1736 –1743.

[12] Ostrowski A M. Solution of Equations in Euclidean and Banach Space[M]. New York: Academic Press,1973.

[13] 李庆杨,莫孜中,祁力群.非线性方程组的数值解法[M].北京:科学出版社,1997.

[14] Potra F A, ptάk V, Nondiscrete Induction and Iterative Processes[M]. New York: Boston,1984.

（下转第 28 页　continued on page 28）

2003，27(12)：45-46.
[7] 刘伟，郭志忠．配电网故障区间判断的新型矩阵算法[J]．电力系统自动化，2002，26(18)：21-24.
LIU Wei, GUO Zhi-zhong. A New Algorithm for the Fault Sections Detection in Distribution System[J]. Automation of Electric Power Systems, 2002, 26(18): 21-24.
[8] 毕天姝, 倪以信, 等. 基于新型神经网络的电网故障诊断方法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(2):73-78.
BI Tian-zhu, NI Yi-xin, et al. A Novel Neural Network Approach for Fault Section Estimation[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(2):73-78.
[9] Oyama T. Fault Section Estimation in Power System Using Boltzmann Machine[A]. In: Proc.of Second Forum on Artificial Neural Network Applications to Power Systems[C]. Japan:1993.
[10] 杨伟, 刘娅琳, 吴军基. 基于改进遗传算法的配电网故障诊断[J]. 长沙电力学院学报(自然科学版), 2005, 20(2):25-30.
YANG Wei, LIU Ya-lin, WU Jun-ji. Fault Diagnonsis of Distribution Network Based on Genetical Algorithm[J]. Journal of Changsha University of Electric Power (Natural Science), 2005, 20(2): 25-30.
[11] 李彤, 王春峰, 王文波, 等. 求解整数规划的一种仿生类全局优化算法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, (1): 76-85.
LI Tong,WANG Chun-feng,WANG Wen-bo, et al. A Global Optimization Bionics Algorithm for Solving Integer Programming[J] System Engineering Theory and Practice, 2005, (1): 76-85.
[12] 杜红卫, 孙雅明, 等. 基于遗传算法的配电网故障定位和隔离[J]. 电网技术, 2000, 24(5):52-55.
DU Hong-wei, SUN Ya-ming, et al. Fault Section Diagnosis and Isolation of Distribution Networks Based on Genetic Algorithm[J]. Power System Technology, 2000, 25(5):52-55.

收稿日期：2008-04-17；　修回日期：2008-05-30

作者简介：
武　娜（1983-），女，硕士研究生，主要从事电力系统继电保护研究工作；E-mail:wuna1005y@sina.com
焦彦军（1966-），男，博士，副教授，从事电力系统继电保护教学与科研工作。

（上接第 8 页　continued from page 8）

[15] Noor M A, Noor K I. Three-step Iterative Methods for Nonlinear Equations[J]. Applied Mathematics and Computation,2006, 183(1):322-327.
[16] Chun C. Iterative Methods Improving Newton's Method by the Decomposition Method[J]. Computer& Mathematics with Applications,2005, 50:1559-1568.
[17] Darvishi M T, Barati A. A Third-order Newton-type Method to Solve sSystems of Nonlinear Equations[J]. Applied Mathematics and Computation,2007, 187(2): 630- 635.
[18] Weerakoon S, Fernando T G I. A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-order Convergence [J].Applied Mathematics Letters, 2000,13(8):87-93.
[19] Frontini M, Sormani E. Some Variants of Newton's Method with Third-order Convergence[J].Applied Mathematics and Computation,2003,140(2):419-426.
[20] Özban A Y. Some New Variants of Newton's Method[J]. Applied Mathematics Letters,2004,17(6):677-682.
[21] Homerier H H H. A Modified Newton's Method for Rootfinding with Cubic Convergence[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2003,157(1):227–230.
[22] Homerier H H H. A Modified Newton's Method with Cubic Convergence: the Multivariate Case[J].Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 169 (1):161-169.
[23] Frontini M, Sormani E. Third-order Method from Quadrature Formulae for Solving Systems of Nonlinear Equations[J].Applied Mathematics and Computation, 2004, 149(3):771-782.
[24] Homerier H H H. On Newton-type Methods with Cubic Convergence[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005,176(2):425-432
[25] Kou Ji-sheng, Li Yi-tian, Wang Xiu-hua. A Modification of Newton Method with Third-order Convergence[J]. Applied Mathematics and Compution,2006,181(2): 1106-1111.

收稿日期：2008-04-16；　修回日期：2008-11-16

作者简介：
孙志媛（1982-），女，工学硕士，助理工程师，从事电力系统分析与计算工作；E-mail: yalulu_1983@163.com
孙　艳（1979-），男，博士研究生，研究方向为电力系统分析与计算；
宁文辉（1970-），男，硕士，高级工程师，研究方向为电力系统分析与计算。