

# 考虑负频分量影响的 FFT 插值算法

王绍辉<sup>1</sup>, 柯献辉<sup>2</sup>, 许珉<sup>1</sup>

(1. 郑州大学电气工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 郑州大学工程力学系, 河南 郑州 450002)

**摘要:** 采用加矩形窗 FFT 插值算法, 谐波的负频分量对谐波计算的误差影响较大。为了提高结果的精确性, 大多采用多项余弦窗插值的方法, 这些窗的主瓣较宽, 降低了计算速度和实时性。为此首先分析了泄露误差的产生, 然后提出了考虑负频分量影响的矩形窗插值 FFT 算法。由于最少只需采样 2 个周期, 所以该算法实时性好, 采样点数少, 计算速度快。为了提高运算精度, 考虑了各次谐波旁瓣的影响。为了减小插值 FFT 算法的计算量, 采用三次样条函数逼近加矩形窗的插值函数, 计算量小, 实时性好。仿真计算结果表明, 采用该方法得到的幅值和频率都具有较高的计算精度。

**关键词:** 负频分量; 泄露误差; 矩形窗; 插值 FFT 算法; 三次样条函数; 旁瓣影响

## FFT interpolation algorithm considering the effect of negative frequency component

WANG Shao-hui<sup>1</sup>, KE Xian-hui<sup>2</sup>, XU Min<sup>1</sup>

(1. College of Electric Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** For rectangular window FFT interpolation algorithm, the negative frequency components of harmonic components have a greater impact on the fundamental calculation error. To improve the accuracy, they use a number of cosine window interpolation methods, which would reduce the computing speed and real-time. First, the paper analyses the reason of the error leaked, then introduces the rectangular window FFT interpolation algorithm considering the impact of the negative frequency component. The rectangular window has narrow main flap, short sampling period and a good real-time, and using a cosine signal to the input signal is derived formula closer to the actual situation. Because only two sampling periods, using sampling points are fewer, and faster computing speeds. In order to increase computing precision, the paper takes into account all the harmonics side lobe impact. To reduce FFT interpolation algorithm computation, using cubic spline function approximation increase rectangular window interpolation function has a small amount of computation and a good real-time. Simulation results show that the amplitude and frequency have a high level of accuracy using this method.

**Key words:** negative frequency component; leakage error; rectangular window; FFT interpolation; cubic spline function; side lobe impact

中图分类号: TM714 文献标识码: A 文章编号: 1003-4897(2008)11-0033-04

## 0 引言

用 FFT 计算周期信号必须截断, 取一个或多个整周期, 这必然产生频谱泄漏<sup>[1,2]</sup>。而用单频信号去分析, 自然无法考虑到 FFT 变换时产生的负频信号的影响。当进行电量测量时, 如果采样频率不等于基波频率的整倍数, 计算得到的是泄漏的频谱(栅栏效应), 计算存在较大误差。实际电网频率通常总会在额定频率(我国为 50 Hz)附近波动, 解决这个问题的

方法有: 采用硬件锁相环电路产生采样周期实现同步采样; 测频调整定时采样时间常数实现同步采样; 采用 FFT 插值算法<sup>[1,3-6]</sup>和其他改进算法<sup>[7,8]</sup>。

在插值 FFT 的计算中, 采用性能较好的窗如: 汉宁窗等, 因它们的主瓣较宽, 一般需要采样多个周期以上。虽然矩形窗的旁瓣较窄, 最少只需采样 2 个周期, 采样点数少, 实时性好, 计算速度快。但不考虑负频影响的加矩形窗 FFT 插值算法存在着较大的误差, 无法满足测量要求, 现在广泛采用的是多项余弦窗插值的方法, 虽然能提高精度但是要采用多个采样周期的数据, 降低了计算速度和实时

基金项目: 河南省科技攻关项目 (72102260006)

性。为此本文提出了考虑负频分量影响的加矩形窗插值算法，用余弦信号作为输入信号来推导公式不仅更接近实际情况，而且只需采样 2 个周期，所用的采样点数少，计算速度快。由于考虑了其它次谐波旁瓣引起的长范围泄露的影响，因此提高了计算精度，能很好地满足要求。另外考虑到插值算法不易计算，采用三次样条函数计算插值 FFT 函数，计算量小，实时性好，有效地提高了插值 FFT 算法的计算速度。

### 1 泄露误差

以周期序列  $x(n) = \cos(\omega_0 n)$ ， $\omega_0 = \pi/4$  为例，

该周期序列的频谱函数为

$$X(e^{j\Omega}) = \text{FFT}[\cos(\frac{\pi}{4}n)] = \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi r) + \delta(\Omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi r)]$$

其频谱（只画出一个周期）如图 1(b)所示。现对该无限长序列  $x(n)$  加矩形窗  $R_8(n)$  截短， $R_8(n)$  的频谱如图 1(a)所示。

$X(e^{j\Omega})$  实际上是矩形窗函数的频谱  $R_N(e^{j\Omega})$  分别左移和右移  $\pi/4$  的叠加，如图 1(c)所示。从图中可以看出，无限长序列  $x(n)$  加窗截断后，原来的离散谱线向附近展宽，这个现象称为频谱泄露。显然泄露误差来自两个方面，由信号负频（旁瓣）分量引入的长范围泄露 (Long-Range Leakage) 和由窗的扇形损失 (主瓣) 引入的短范围泄露 (Short-Range Leakage)。如何尽可能减小这两种不同的泄露误差是提高高频谱分析精度的关键。从图中可以看出，基波和其它次谐波的长范围泄露对基波的正频分量的频谱泄露造成了影响，如果忽略负频，会造成计算误差。所以本文采用了考虑负频分量影响的加矩形窗插值 FFT 算法来减小泄露误差的影响，提高其计算精度。

### 2 考虑负频影响的插值 FFT 算法

由于在进行 FFT 变换时离散谱也会受到负频信号旁瓣的影响，所以本文采用的仿真计算信号为  $u(t) = A_m \cos(2\pi f_1 t)$ ，用它表示  $U(k)$  所对应的时域信号，更接近实际情况，这样计算出的结果要比单频信号精确。为提高运算速度只采集 2 个周期

的数据，选择矩形窗函数对信号截断，当  $N \gg 1$  时，对信号加窗后的 DFT 为

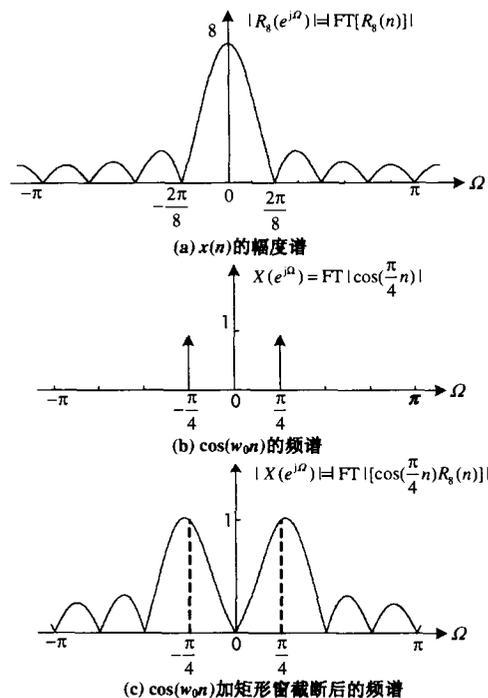


图 1 截断效应

Fig.1 Truncation effect

$$U(k) = 0.5U_m \left\{ \frac{\sin[(k-l-r)\pi]}{N \sin[\frac{(k-l-r)\pi}{N}]} e^{-j(k-l-r)\pi \frac{N-1}{N}} + \frac{\sin[(k+l+r)\pi]}{N \sin[\frac{(k+l+r)\pi}{N}]} e^{-j(k+l+r)\pi \frac{N-1}{N}} \right\}$$

$$U(k+1) = 0.5U_m \left\{ \frac{\sin[(k+1-l-r)\pi]}{N \sin[\frac{(k+1-l-r)\pi}{N}]} e^{-j(k+1-l-r)\pi \frac{N-1}{N}} + \frac{\sin[(k+1+l+r)\pi]}{N \sin[\frac{(k+1+l+r)\pi}{N}]} e^{-j(k+1+l+r)\pi \frac{N-1}{N}} \right\}$$

加矩形窗的插值 FFT 算法的  $l$  次谐波幅值和相位的估计式为：

$$U_m = U_R(l) \frac{2\pi}{B \sin(r\pi)} e^{jr\pi}$$

$$(B = |\frac{1}{r} e^{j2r\pi} + \frac{1}{2l+r}|) \quad (1)$$

$$\varphi_m = \text{angle}[U_R(l)] + r\pi - \text{angle}[\frac{1}{r} e^{j2r\pi} + \frac{1}{2l+r}] \quad (2)$$

由加矩形窗后的频谱比值得：

$$\alpha = \frac{|U_R(l)|}{|U_R(l+1)|} =$$

$$\left| \frac{1}{r} e^{j2r\pi} + \frac{1}{2l+r} \right| \left| 1 - \frac{1}{1-r} e^{j2r\pi} + \frac{1}{2l+r+1} \right| \quad 0 < r \leq 1$$

对于  $k$  次谐波采样  $n$  个周期, 则  $l = nk$ 。然后利用三次样条函数逼近加矩形窗插值 FFT 算法函数, 得到  $r$  的值以后, 代入(1)、(2)式得到幅值和相位。

### 3 考虑旁瓣影响

矩形窗频谱的旁瓣很大, 使得长范围泄漏较严重, 若仍沿用上述的插值方法对测量结果进行修正, 未能得到令人满意的效果, 还应考虑其它次谐波引起的长范围泄露。下面以基波为例:

$$0.5U_m \frac{\sin[(k+l+r)\pi]}{N \sin[\frac{(k+l+r)\pi}{N}]} e^{-j(k+l+r)\pi \frac{N-1}{N}}$$

这项表示了负频信号旁瓣的影响。测量三次谐波时, 仍受到了基波旁瓣的影响, 可用这项表示, 其中  $l = 3n, k = n$  (采样  $n$  个周期)。将此项用  $t(l)$  表示, 则:

$t(l+1)$  可以表示为

$$0.5U_m \frac{\sin[(k+l+r+1)\pi]}{N \sin[\frac{(k+l+r+1)\pi}{N}]} e^{-j(k+l+r+1)\pi \frac{N-1}{N}}$$

由加矩形窗后的频谱比值得:

$$\alpha = \frac{|U_R(l) - t(l)|}{|U_R(l+1) - t(l+1)|}$$

加矩形窗的插值 FFT 算法的  $l$  次谐波幅值和相位的估计式为

$$U_m = [U_R(l) - t(l)] \frac{2\pi}{B \sin(r\pi)} e^{jr\pi} \quad (3)$$

$$(B = \left| \frac{1}{r} e^{j2r\pi} + \frac{1}{2l+r} \right|)$$

$$\varphi_m = \text{angle}[U_R(l) - t(l)] + r\pi - \text{angle}\left[\frac{1}{r} e^{j2r\pi} + \frac{1}{2l+r}\right] \quad (4)$$

对于相邻次谐波, 以及其它含量较高的谐波, 均可由此项表示, 只不过是  $l$  和  $k$  的取值有所不同 (视谐波次数和采样周期而定), 计算方法没有分别。

### 4 仿真计算及分析

令仿真计算的电压信号为含有谐波分量的函数, 即

$$u(t) = 380\cos(\omega t + 5^\circ) + 10\cos(3\omega t + 15^\circ) + 15\cos(5\omega t + 25^\circ)$$

其中:  $\omega = 2\pi f_0$ , 采样频率  $f_s = 6400$  Hz, 采样点数  $N = 512$ , 采样周期  $k = 2$ , 用本文提出的方法进行了计算, 其结果如表 1 所示。

表 1 仿真运算结果

Tab. 1 Simulation computation results

频率 /Hz	谐波次数	信号类型	幅值 /V	误差 / (%)	相位 / (°)	误差 / (%)
50.5	基波	单频	382.3035	-0.6062	5.8921	-17.8421
		负频	380.6727	-0.1770	5.2868	-5.7361
	3次谐波	单频	9.5612	4.3885	13.0700	12.8667
		负频	9.9582	0.4183	15.8192	-5.4610
	5次谐波	单频	14.7301	1.7992	21.4315	14.2739
		负频	14.9413	0.3914	22.8546	8.5817
50.3	基波	单频	381.4256	-0.3751	5.5553	-11.1058
		负频	380.4285	-0.1128	5.1815	-3.6292
	3次谐波	单频	9.7483	2.5171	14.3138	4.5744
		负频	9.9688	0.3124	15.6499	-4.3325
	5次谐波	单频	14.8290	1.1397	23.0137	7.9454
		负频	14.9482	0.3453	24.4120	2.3519
50.1	基波	单频	380.4875	-0.1283	5.1907	-3.8137
		负频	380.1493	-0.0393	5.0630	-1.2601
	3次谐波	单频	9.9187	0.8134	14.8848	0.7681
		负频	9.9935	0.0646	15.1120	-0.7470
	5次谐波	单频	14.9383	0.4114	24.3652	2.5393
		负频	14.9896	0.0695	24.9662	0.1352
49.9	基波	单频	379.5170	0.1271	5.2978	-5.9563
		负频	379.9086	0.0241	5.0479	-0.9588
	3次谐波	单频	10.0792	-0.7919	14.1296	5.8028
		负频	9.9950	0.0504	14.9987	0.0089
	5次谐波	单频	15.0607	-0.4049	23.9835	4.0660
		负频	15.0111	-0.0741	24.7810	0.8759
49.7	基波	单频	378.6139	0.3648	5.8735	-17.4708
		负频	379.7359	0.0695	5.1423	-2.8457
	3次谐波	单频	10.2334	-2.3342	12.1783	18.8114
		负频	9.9884	0.1156	14.6686	2.2090
	5次谐波	单频	15.1625	-1.0835	21.9444	12.2225
		负频	15.0213	-0.1420	24.2666	2.9336
49.5	基波	单频	377.8029	0.5782	6.4172	-28.3440
		负频	379.5816	0.1101	5.2322	-4.6448
	3次谐波	单频	10.3953	-3.9528	10.1916	32.0559
		负频	9.9847	0.1534	14.1608	5.5949
	5次谐波	单频	15.2485	-1.6568	19.7812	20.8753
		负频	15.0290	-0.1934	23.5150	5.9401

从结果中可以看出采用本文提出的插值方法, 在 50±0.5 Hz 以内, 幅值误差小于 0.5%。如果采用

汉宁窗等性能更好的窗,则至少需要 2 个以上周期,降低了运算速度。但是为了提高运算速度,用单频信号直接采用矩形窗的话,测量精度较差。相比较而言,采用本文提出的方法,在满足测量精度的条件下尽可能地提高了运算速度。

## 5 结论

考虑负频分量影响的插值 FFT 算法,与普通的矩形窗插值 FFT 算法相比,减小了泄露误差的影响,可以提高测量精度。与高性能窗相比,由于采样周期数少,因而具有较快计算速度和较好的实时性。考虑负频分量旁瓣影响后,频率修正系数很难直接得出结果,采用三次样条插值法求解,使问题得到了简化,仿真结果表明该方法提高了计算精度,具有实用价值。

## 参考文献

- [1] 祁才君. 数字信号处理技术的算法分析与应用[M]. 北京: 机械工业出版社,2005.
- [2] 丁玉美,高西全. 数字信号处理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社,2001.
- [3] Jain Vijay K, Collins Willim L. High-accuracy Analog Measurements via Interpolated FFT[J]. IEEE Trans on IM,1979,28:113-122.
- [4] Grandke Tomas. Interpolation Algorithms for Discrete Fourier Transform of Weighed Signals[J]. IEEE Trans on IM,1983,32:350-355.
- [5] 潘文,钱俞寿,周鄂. 基于加窗差值FFT 的电力谐波测量理论(I)窗函数研究[J]. 电工技术学报,1994,9(1): 50-54.
- [6] 潘文,钱俞寿,周鄂. 基于加窗差值FFT 的电力谐波测量理论(II)双插值FFT理论[J]. 电工技术学报,1994,9(2): 53-56.
- [7] PAN Wen, QIAN Yu-shou, ZHOU E. Power Harmonics Measurement Based on Windows and Interpolated FFT (I) Study of Windows [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 1994, 9(1): 50-54.
- [8] PAN Wen, QIAN Yu-shou, ZHOU E. Power Harmonics Measurement Based on Windows and Interpolated FFT (II) Dualinterpolated FFT Algorithms[J]. Transactions of China Electrotechnical Society,1994, 9(2): 53-56.
- [9] 赵文春,马伟明,胡安. 电机测试中谐波分析的高精度 FFT算法[J]. 中国电机工程学报,2001,21(12): 83-87.
- [10] ZHAO Wen-chun, MA Wei-ming, HU An. FFT Algorithm with High Accuracy for Harmonic Analysis in the Electric Machine[J]. Proceedings of the CSEE, 2001,21(12): 83-87.
- [11] 薛蕙,杨仁刚. 基于FFT 的高精度谐波检测算法[J]. 中国电机工程学报,2002,22(12): 106-110 .
- [12] XUE Hui, YANG Ren-gang. Precise Algorithms for Harmonic Analysis Based on FFT Algorithm[J]. Proceedings of the CSEE, 2002,22(12): 106-110.

收稿日期: 2007-09-21; 修回日期: 2008-01-24

作者简介:

王绍辉(1983-), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力电子与电能质量监测; E-mail: hnlywsh@163.com

许珉(1956-), 男, 教授, 从事电气设备故障诊断及数字信号处理等方面的研究。

(上接第 8 页 continued from page 8)

- [13] 李庆扬. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社,1987.
- [14] 黄正达. Broyden 方法的收敛条件[J]. 浙江大学学报(理学版),2002,29(1): 25-30.
- [15] HUANG Zheng-da. On the Convergent Condition of the Broyden Method[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2002,29(1): 25-30.
- [16] 陈兰平,樊启毅,焦宝聪. Broyden 修正算法[J]. 数学的实践与认识,2005,35(5): 110-114.
- [17] CHEN Lan-ping, FAN Qi-yi, JIAO Bao-cong. Broyden Update Algorithm[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2005,35(5): 110-114.
- [18] 徐政. 交流等值法交直流电力系统潮流计算[J]. 中国电机工程学报,1994,14(3): 1-6.
- [19] XU Zheng. AC Equivalent Approach for AC/DC Power System Load Flow[J]. Proceedings of the CSEE,1994,14(3): 1-6.
- [20] Panosyan A, Oswald B P. Modified Newton-Raphson Load Flow Analysis for Integrated AC/DC Power Systems[A]. In: Universities Power Engineering Conference[C]. 2004.1223-1227.
- [21] 张伯明,陈寿孙. 高等电力网络分析[M]. 北京: 清华大学出版社,1996.
- [22] 安恒斌,白中治. 关于多元非线性方程的 Broyden 方法[J]. 计算数学,2004,26(4): 385-400.
- [23] AN Heng-bing, BAI Zhong-zhi. Broyden Method for Nonlinear Equation in Several Variables[J]. Mathematica Munerica Sinica, 2004,26(4): 385-400.

收稿日期: 2007-10-08; 修回日期: 2007-12-04

作者简介:

曾超(1982-), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力电子在电力系统中的应用; E-mail: asa20000@163.com

彭建春(1964-), 男, 教授, 博士生导师, 从事电力市场、电力系统优化运行与控制的研究;

金灵满(1982-), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统优化运行与控制。