基于松弛牛顿法的配电网潮流计算方法

汪芳宗，向小民，袁兆强

（三峡大学电气信息学院，湖北 宜昌 443002）

摘要：配电网潮流的分析计算是配电自动化系统中的一项最基本的高级应用功能。将矩阵求逆运算的松弛方法应用于配电网的潮流计算，并利用矩阵分裂法，导出了一种新的配电网潮流计算算法。导出的算法具有通用性，既可用于放射形配电网，又适用于含有环网的一般配电网络。算法的求解过程简单、快捷，无需直接形成和计算雅可比矩阵、无需三角因子分解等过程，直接由前代／回代或回代／前代过程就能完成。以一个实际的中等规模配电系统为例，测试、分析和比较了算法的收敛性和计算速度，证实了所提算法的有效性。

关键词：配电系统；潮流计算；松驰牛顿法；矩阵分裂；前推回推法

Relaxed Newton method for power flow analysis of distribution systems

WANG Fang-zong，XIANG Xiao-min，YUAN Zhao-qiang

(College of Electrical Engineering & Information Technology，China Three Georges University，Yichang 443002，China)

Abstract: This paper describes a novel power flow solution algorithm for solving distribution systems, using the relaxation method for Jacobian matrix inversion, as well as the matrix splitting method for distribution network with loops. The derived method is general for load flow solution of both radial distribution systems and distribution networks with loops. Furthermore, with the derived formulation, the solution procedures become very simple and fast, because the conventional procedures of forming the Jacobian matrix and the sparse triangular factorization are reduced,and then the back/forward substitution are replaced only by the direct back/forward substitution. Tests on a practical distribution system show that the proposed method is robust and efficient for practical power flow analysis of distribution systems.

Key words: distribution systems；load flow solution；relaxed Newton method；matrix splitting；back/forward sweep method

中图分类号：TM744　　文献标识码：A　　文章编号：1003-4897(2007)06-0021-04

0 引言

潮流计算是电力系统分析工作中最基本的任务之一。基于牛顿法的潮流计算方法在电力系统分析计算中得到了广泛的应用，牛顿法结合稀疏三角分解技术在电力系统潮流计算中占居主导地位，已成为 EMS 中的一项基本功能。但是，尽管上述方法在高压输变电网中的应用是很成功的，但对于低压配电网特别是放射形配电网来说，经典的牛顿方法在计算速度上显现不出任何优势，而快速解耦潮流算法在理论基础上就不适合于 r/x 比例很高的配网潮流计算。

配电网潮流的分析计算，是 DMS 或配电自动化系统中的一项最基本的高级应用功能。关于配电网潮流计算问题，国内外学者近年来做了大量的工作，提出了不少算法，同时发表了不少论文[1~11]。迄今为止，对放射形配电网而言，最基本和应用较广的潮流计算方法应该是前推回推法(Back/forward sweep method)[1,2]。前推回推法具有物理概念简单明了、求解过程简便快捷、收敛性较好等优点。但是，前推回推法必须对节点和支路按一定的规则进行分层和编号，这对于大规模配电网和工程实际应用来说是一件比较麻烦的事情。此外，经典的前推回推法不能用于含有回路的配电网络，而且这种算法与电力系统中多年使用的牛顿求解方法在求解过程、编程思路等方面完全不一样，这也是阻碍前推回推法应用于工程实际的一个重要原因。

为处理环网问题，文献[2]提出了一种基于多端口补偿注入电流的弱互联配电网潮流计算方法；文献[3]将配电网络分解为开环运行的网络即放射形网络和仅保留环状支路和合环点处电压源的纯环状网络，然后对放射形网络采用前推回推法进行求解，对纯环状网络采用回路分析法进行求解，最后将两种网络的计算结果叠加即可计算出整个网络的潮流。此类方法的核心部分仍是基于前推回推法，在实际应用中的主要问题，就是在主流程序之

外，须额外编制另外一部分程序对回路问题进行特殊处理。因此，算法的通用性不强。另外，在对环网的处理上，文献[3]的方法是基于回路分析的思想，在工程实际应用中如何自动搜索出由“合环点”所形成的“基本回路”，是一项比较复杂和费时的任务。

本文利用矩阵分裂法以及矩阵求逆运算的松弛方法[12]，导出了一种新的配电网潮流计算方法。该方法具有通用性，既可用于放射形配网，又可以用于含有环网的配电系统，求解过程简单、快捷，无需直接形成和计算雅可比矩阵，无需对雅可比矩阵进行费时的三角分解，充分利用了配电网的结构特征，适合于大规模配电网潮流的分析计算。

1　配网潮流的松弛牛顿计算方法

在采用直角坐标系的前提条件下，基于牛顿法的潮流计算可由下列方程描述：

$$-J\Delta V = \Delta W \tag{1}$$

式中，J 为雅可比矩阵，ΔW 为节点注入功率残差向量。有关表达式如下：

$$\Delta V = [(\Delta e_1, \Delta f_1)^T, \cdots, (\Delta e_n, \Delta f_n)^T]^T \tag{2}$$

$$\Delta W = [(\Delta Q_1, \Delta P_1)^T, \cdots, (\Delta Q_n, \Delta P_n)^T]^T \tag{3}$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} M_{ij} & L_{ij} \\ H_{ij} & N_{ij} \end{bmatrix} \quad i, j \in (1, n) \tag{4}$$

$$M_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} + (B_{ii} e_i - G_{ii} f_i) \tag{5}$$

$$M_{ij} = (B_{ij} e_i - G_{ij} f_i) \tag{6}$$

$$N_{ii} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} + (B_{ii} e_i - G_{ii} f_i) \tag{7}$$

$$N_{ij} = (B_{ij} e_i - G_{ij} f_i) = M_{ij} \tag{8}$$

$$L_{ii} = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} + (G_{ii} e_i + B_{ii} f_i) \tag{9}$$

$$L_{ij} = (G_{ij} e_i + B_{ij} f_i) \tag{10}$$

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} - (G_{ii} e_i + B_{ii} f_i) \tag{11}$$

$$H_{ij} = -(G_{ij} e_i + B_{ij} f_i) = -L_{ij} \tag{12}$$

$$\alpha_{ij} = G_{ij} f_j + B_{ij} e_j, \quad \beta_{ij} = G_{ij} e_j - B_{ij} f_j \tag{13}$$

定义

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij} & G_{ij} \\ -G_{ij} & B_{ij} \end{bmatrix} \quad i, j \in (1, n) \tag{14}$$

$$V_i = \begin{bmatrix} e_i & f_i \\ -f_i & e_i \end{bmatrix} \quad i, j \in (1, n) \tag{15}$$

$$J'_{ii} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} & -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \\ -\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} & -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \end{bmatrix} \quad i, j \in (1, n) \tag{16}$$

$$V = \mathrm{Diag}(V_1, \cdots, V_n) \tag{17}$$

$$J_d = \mathrm{Diag}(J'_{11}, \cdots, J'_{nn}) \tag{18}$$

则雅可比矩阵可以写成：

$$J = J_d + YV = J_d + VY \tag{19}$$

上式中：Y 为节点导纳矩阵。在配电网中，由于支路较短，各支路两端电压落差很小，而且一般情况下不考虑对地电纳，因此有

$$G_{ii} + \mathrm{j}B_{ii} = -\sum_{j \in i, j \neq i} (G_{ij} + \mathrm{j}B_{ij}) \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \approx 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \approx 0 \tag{21}$$

因此，$J_d \approx 0$. 在这种情况下，可以利用矩阵求逆运算的松弛方法近似计算[12]

$$J^{-1} = (YV + J_d)^{-1} \approx (I - Y^{-1} V^{-1} J_d) Y^{-1} V^{-1} \tag{22}$$

这样，我们可以得出

$$\Delta V \approx -(I - Y^{-1} V^{-1} J_d)\ Y^{-1} V^{-1} \Delta W \tag{23}$$

定义

$$\Delta \tilde{V} = -Y^{-1} V^{-1} \Delta W' \tag{24}$$

$$\lambda = -Y^{-1} V^{-1} J_d \tag{25}$$

则方程(23)最终可以写成

$$\Delta V \approx \Delta \tilde{V} + \lambda \Delta \tilde{V} \tag{26}$$

这就是本文所提出的“松弛牛顿计算方法”。

理论上，若谱半径 $\rho(Y^{-1} V^{-1} J_d) < 1$，则上述算法是超线性收敛的。若忽略 J_d，即 $\lambda = -Y^{-1} V^{-1} J_d = 0$，则上述算法即是“完全松弛牛顿法”，此时算法是线性收敛的。

方程(26)的求解涉及对节点导纳矩阵的求逆或三角分解问题，这是经典牛顿法求解过程中必需的一个步骤，也是一个非常费时的过程。下面叙述节点导纳矩阵的直接三角分解方法。

首先研究放射形配电网络。对放射形配电网络，一个重要的结论或事实就是存在下列方程

$$Y_r = B Y_b B^T \tag{27}$$

式中：Y_r 为放射形配电网络的节点导纳矩阵，B 为带方向性的节点-支路关联矩阵，Y_b 为支路导纳矩阵，即是按支路编号顺序由相应的支路导纳组成的一个对角阵。若采用与前推回推法相同的节点、支路编号方式，则 B 为一稀疏下三角阵或为一稀疏上三角阵，具体与编号规则有关。关于方程(27) 的推

导或描述，可以参看文献[2]和文献[11]。

对含有环网的配电系统，方程(27)是不成立的。此时，节点数（n）不等于支路数（l），$n<l$。为解决这一问题，可以利用节点分裂法和矩阵分裂法。所谓节点分裂法，就是将实际的配电网中所有“合环点”全部一分为二，即将一个“合环点”分裂成二个不互联的节点，但在计算此分裂后的系统的节点导纳矩阵时，被一分为二的二个不互联的节点的自导纳以及与其它节点之间的互导纳必须按原始网络情况进行计算。为叙述方便起见，将这一增加了“虚拟节点”的修改后的节点导纳矩阵记为$\boldsymbol{Y}'$。$\boldsymbol{Y}'$与$\boldsymbol{Y}$在本质上是等价的，两者的秩是相等的，即$r(\boldsymbol{Y}')=r(\boldsymbol{Y})$，只是$\boldsymbol{Y}'$的维数高于$\boldsymbol{Y}$的维数。在此基础上，利用矩阵分裂法，可以得到

$$\boldsymbol{Y}'=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}+\Delta\boldsymbol{Y}_{\mathrm{l}}\,,\quad \Delta\boldsymbol{Y}_{\mathrm{l}}=\boldsymbol{Y}'-\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}} \tag{28}$$

很易理解，按上述方法进行处理后，补差矩阵$\Delta\boldsymbol{Y}_{\mathrm{l}}$是一个强稀疏（块形式）对称矩阵，其绝大部分元素为0。例如，若网络只含一个环网，则$\Delta\boldsymbol{Y}_{\mathrm{l}}$为只含2×2个非零元素的对称矩阵。

利用方程(28)和(27)，方程(24)和(25)可以改写成

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Delta\tilde{\boldsymbol{V}}=-\boldsymbol{V}^{-1}\Delta\boldsymbol{W} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=-\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}+\Delta\boldsymbol{Y}_{\mathrm{l}}) \tag{30}$$

至此，本文导出了配电网潮流计算的松弛牛顿计算方法。

很显然，方程(29)和(30)的求解是很容易的，它无需直接形成配电网的雅可比矩阵，也无需对雅可比矩阵进行费时的稀疏三角分解，而是直接利用了解裂后的纯放射形配网的支路导纳矩阵和其节点-支路关联矩阵。

在实际计算中，对方程(29)和(30)中的$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$和$\Delta\boldsymbol{W}$须进行与$\boldsymbol{Y}$相类似的简单处理。这样处理的最终结果就是额外计算出了“虚拟节点”的电压值。由于系统的对称性，所得出的“虚拟节点”的电压值与对应的另一节点或实际的“合环点”的电压值是相同的，在求解过程中无须任何约束处理。这种对环网的处理方法与文献[2]中对环网的处理方法在思路上是相同的，但在其后续求解过程中，本文所提方法更为简便。

应该着重说明的是，关联矩阵$\boldsymbol{B}$中与叶节点相对应的行均只含一个非零（块矩阵）元素，其它行均只含2个非零元素。因此，在工程实际应用中，可以直接采用自然编号方式（经典牛顿法对节点和支路是采用自然编号方式的）进行求解。

2 检验结果及分析比较

2.1 算例系统简介

算例系统采用了某城区供电公司一个35 kV变电站内、10 kV母线上全部的10 kV主出线所供电的配电系统。该系统含337条10 kV线路、139个配变。10 kV主出线中有2条线路（1线主供、1线备供）给一个10 kV开闭所供电，开闭所所供电的配电网络中含有2个环网，其它的配电网络均是放射形供电的。以10 kV母线为源点、配变低压侧母线为边界点，该系统共计476条支路和474个节点。若将2个环网在合环点解裂，则系统共计476条支路和476个节点。计算中各配变负荷按其月度平均功率进行计算，同时均设为恒功率负荷。

2.2 测试结果及分析比较

表1是利用本文所提方法对上述系统进行实际编程计算所测得的结果。潮流计算所需数据，例如导线型号、长度、单位长度阻抗、网络电气连接关系以及有关负荷等等，均从该供电公司“配网GIS系统”数据库（Oracle 8i）中读取，所有节点和支路均是随机、自然编号的。具体进行潮流计算的客户端所用计算机为Pentium(R) 4，CPU主频为3.06 GHz。因负荷水平为kW/kvar量级，所以收敛精度均统一定为$\|\Delta\boldsymbol{W}_i\|\le 10^{-5}$ p.u.。

表1 算法测试结果

Tab.1 Test results of the proposed algorithm

迭代次数	计算时间/s
5	4.89

从表1可以看出，本文所提方法的收敛性是比较好的。应该着重说明的是，表1中的“计算时间”不仅仅包括纯粹的潮流计算所用CPU时间（即客户端计算时间），而且包括客户端与数据服务器相互之间的网络数据通讯时间（对数据库进行查询、读写等各种操作）。

为对比分析算法的收敛性和计算速度，将本文所提算法与配网潮流计算中最基本和有效的前推回推法进行了对比测试。由于前推回推法只适用于放射形配网，因此测试时将上述配网中的2个环网解裂，即系统成为一个纯放射形网络（$\Delta\boldsymbol{Y}_{\mathrm{l}}=0$，$\boldsymbol{Y}'=\boldsymbol{Y}$）。

表2 放射形配网对比测试结果

Tab.2 Comparison results of radial network

所用方法	迭代次数	计算时间/s
前推回推法	5	4.22
本文方法	4	4.03

从表2可以看出，对放射形配网而言，本文所提出的松弛牛顿计算方法在收敛性和计算速度上比前推回推法更加有效。利用前推回推法进行潮流计算时，从数据库中读取各类原始数据后，必须对网络节点和支路进行重新编号，这涉及网络拓扑分析，当电网规模较大时，是比较费时的。

表 3 是使用上述配网系统将本文所提算法与文献[2]的方法进行对比测试的结果。

表 3 实际算例系统对比测试结果

Tab.3 Comparison results of looped network

所用方法	迭代次数	计算时间/s
文[2]方法	11	6.56
本文方法	5	4.89

从表 3 可以看出，本文所提出的松弛牛顿计算方法比文献[2]的方法更为有效。文献[2]的方法同样须对网络节点和支路进行重新编号。

3 结论

本文利用矩阵分裂法以及矩阵求逆运算的松弛法，导出了一种新的配电网潮流计算方法。该方法具有通用性，既可用于放射形配网，又可以用于含有环网的配电系统。该方法求解过程简单、快捷，无需直接形成和计算雅可比矩阵，无需对雅可比矩阵进行费时的三角分解，充分利用了配电网的结构特征，适合于大规模配电网潮流的分析计算。

很容易理解，本文所提方法完全适用于配电网的三相潮流计算，只需在所提算法中将基于直角坐标系的导纳矩阵换成相应的基于三相（a、b、c 三相）坐标系的导纳矩阵即可。

参考文献

[1] Goswami S K, Basu S K. Direction Solution of Distribution Systems[J]. IEE Proc——Gener, Transm, and Distrib,1991, 138(6): 78-88.

[2] Shirmoharmnadi D, Hong H W, Semlyen A, et al. A Compensation-based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1988, 3(2): 753-762.

[3] 车仁飞，李仁俊. 一种少环配电网三相潮流计算新方法[J]. 中国电机工程学报，2003，23(1)：74-79.
CHE Ren-fei, LI Ren-jun. A New Three-phase Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution Systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(1): 74-79.

[4] 吴文传，张伯明. 配电潮流回路分析法[J]. 中国电机工程学报，2004，24(3)：67-71.
WU Wen-chuan, ZHANG Bo-ming. Study on Loop Analysis Theorem of Distribution System Power Flow[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(3): 67-71.

[5] 索南加乐，单亚洲，李怀强，等. 配网三相潮流的常雅可比牛顿算法[J]. 电力系统及其自动化学报，2004，16(1)：14-18.
SUONAN Jia-le, SHAN Ya-zhou, LI Huai-qiang, et al. A Novel Three Phase Load Flow Algorithm with Constant Jacobian Matrix for Distribution System[J]. Proceedings of the EPSA, 2004, 16(1): 14-18.

[6] 谢开贵，周家启. 树状网络潮流计算的新算法[J]. 中国电机工程学报，2001，21(9)：116-120.
XIE Kai-gui, ZHOU Jia-qi. A New Load Flow Algorithm for Radial Distribution Networks[J]. Proceedings of the CSEE, 2001, 21(9): 116-120.

[7] 蔡中勤，郭志忠. 基于逆流编号法的辐射型配电网牛顿法潮流[J]. 中国电机工程学报，2000，20(6)：13-16.
CAI Zhong-qin, GUO Zhi-zhong. Newton Load Flow for Radial Distribution Network Based on Upstream Labeling Technique [J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(6): 13-16.

[8] 张学松，柳焯，于尔铿，等. 配电网追赶法潮流[J]. 中国电机工程学报，1997，17(6)：382-385.
ZHANG Xue-song, LIU Zhuo, YU Er-keng, et al. A Load Flow Technique for Distribution System Based on Triangular Step by Step Method[J]. Proceedings of the CSEE, 1997, 17(6): 382-385.

[9] 颜伟，刘方，王官洁，等. 辐射型网络潮流的分层前推回代算法[J]. 中国电机工程学报，2003，23(8)：76-80.
YAN Wei, LIU Fang, WANG Guan-jie, et al. Layer by Layer Back/forward Sweep Method for Radial Distribution Load Flow [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(8): 76-80.

[10] 张荣，王秀和，付大金，等. 改进的带二阶项配电网快速潮流算法[J]. 电工技术学报，2004，19(7)：59-64.
ZHANG Rong, WANG Xiu-he, FU Da-jin, et al. Improved Algorithm for Fast Distribution Power Flow Calculation Including Second Order Term[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2004, 19(7): 59-64.

[11] Zhang F, Cheng C S. A Modified Newton Method for Radial Distribution System Power Flow Analysis[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1997, 12(1): 389-397.

[12] 汪芳宗. 电力系统潮流的并行松弛牛顿计算方法[J]. 电力系统自动化，1998，22(12)：16-19.
WANG Fang-zong. Relaxed Newton Method for Parallel Power Flow Calculation[J]. Automation of Electric Power Systems, 1998, 22(12): 16-19.

收稿日期：2006-09-27； 修回日期：2006-12-12

作者简介：

汪芳宗(1966-)，男，博士、教授，主要从事电网一体化计算及并行分布式处理的研究工作；E-mail: fzwang@ctgu.edu.cn

向小民(1963-)，男，副教授，主要从事配电自动化系统的研究工作；

袁兆强(1957-)，男，副教授，主要从事继电保护的研究和教学工作。