第35卷 第4期
2007年2月16日
继电器
RELAY
Vol.35 No.4
Feb.16, 2007

基于精化Arnoldi方法的小信号稳定性关键特征值计算

郑 伟，王克文

（郑州大学电气工程学院，河南 郑州 450002）

摘要：将精化Arnoldi方法引入到大型电力系统小信号稳定性关键特征值的计算。为了求解在给定位移点附近的特征值，先对状态矩阵作位移求逆变换。由于精化向量包含更多的子空间信息，可用精化向量代替相应的Ritz向量作为特征向量的近似，用精化位移代替准确位移作为位移量来改进Arnoldi方法。在重启动的选择上，用隐式重启动技术加速算法的收敛。算例分析表明，精化Arnoldi方法能够可靠和有效地计算大型电力系统的关键特征值。

关键词：小信号稳定性；精化Arnoldi算法；位移求逆变换；隐式重启动

Application of the refined Arnoldi method to the calculation of critical eigenvalues in small signal stability analysis

ZHENG Wei, WANG Ke-wen

(School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002,China)

Abstract: The refined Arnoldi method is applied to calculate critical eigenvalues in small signal stability in the paper. Shift and invert transformation is used for computing a number of eigenvalues close to a given shift. Because the refined Ritz vectors contain more information about the subspace, the Ritz vectors are replaced by the corresponding refined Ritz vectors and the exact shifts are also replaced by the refined shifts. In order to improve the convergence, an implicit restarted scheme is applied to this method. Numerical experiment indicates that the proposed method can calculate the critical eigenvalues of the large power systems reliably and effectively.

This project is supported by National Natural Science Foundation of China(No.50177028).

Key words: small-signal stability; refined Arnoldi method; shift-invert transformation; implicit restart

中图分类号：TM744　　文献标识码：A　　文章编号：1003-4897(2007)04-0040-04

0 引言

特征值法是分析电力系统小信号稳定性的有效方法之一。当系统的状态变量达上千阶时，已超出了传统的QR法有效地进行特征求解的范围。

对于大型电力系统，虽然状态矩阵的维数很高，但真正关心的只是少数临界的特征值，例如实部最大的特征值。根据临界特征值能够判断系统的稳定性。

求解系统临界特征值可以采用降阶选择模式法，也可以用状态矩阵本身进行计算。后者先用谱变换使临界特征值映射为模值较大特征值，再通过稀疏特征值算法计算临界特征值。常用的谱变换方法有位移求逆变换和Cayley变换，稀疏特征值算法有序贯法和子空间迭代法。序贯法包括幂法，反幂法，Reyleigh商迭代法等，一次计算一个特征值。子空间法包括同时迭代法，Lanczos法和Arnoldi法等，一次可以计算多个特征值。

文献[1]将基于稀疏技术的同时迭代法和改进Arnoldi方法应用于大系统的小信号稳定性分析。文献[2]应用位移求逆法，将隐式重启动Arnodli算法推广到复数矩阵情况，可以稳定可靠地计算位移点附近的特征值簇。文献[3]运用块Arnoldi-Chebyshev方法直接求取系统的关键特征值。文献[4]使用的Jacobi-Davidson方法将原问题投影到搜索子空间，通过求解小规模的投影特征值问题得到想要的特征值和特征向量的近似值。

本文结合位移求逆变换、隐式重启动技术，利

基金项目：国家自然科学基金资助项目(50177028)

用精化Arnoldi算法计算状态矩阵的关键特征值。

1　小信号稳定分析的数学模型

本文采用文献[5]中的插入式建模技术（PMT）来形成系统状态空间方程，通过系数矩阵 A 的特征值就可以判断系统的稳定性。

2　算法介绍

2.1 位移求逆变换

考虑如下大规模矩阵特征值问题

$$A\varphi_i=\lambda_i\varphi_i \tag{1}$$

式中：$A\in C^{n\times n}$，特征对为（λ_i，φ_i），并且满足 $\|\varphi_i\|=1$，i=1, 2, …, n。

采用位移求逆变换[7]是为了得到状态矩阵在位移点附近的特征值。设 δ 为位移点，令 $C=(A-\delta I)^{-1}$，$\theta_i=1/(\lambda_i-\delta)$，则特征值问题式(1)可转换为：

$$C\varphi_i=\theta_i\varphi_i \tag{2}$$

在位移点 δ 附近的特征值 λ_i 映射为矩阵 C 模值较大的特征值 θ_i，而特征向量保持不变。这种变换增大了映射特征值的距离。

小信号稳定性分析主要关心的是频率在 0.2～2.5 Hz 且阻尼比小于某给定值的振荡模式，即在复平面上虚部在 1.3 和 15.7 之间，靠近虚轴的特征值。因此可在此范围内选择位移点。

2.2 Arnoldi 方法

对式(1)所示的特征值问题，给定单位长度向量 v_1 和 A，Arnoldi 过程产生 m 维 Krylov 子空间 $K_m(A,v_1)$ 的一组标准正交基 V_m。其矩阵表示形式为：

$$AV_m=V_mH_m+h_{m+1,m}v_{m+1}e_m^*=V_{m+1}\tilde{H}_m \tag{3}$$

式中 $V_m=(v_1,v_2,\cdots,v_k)\in C^{n\times k}$，$H_m$，$\tilde{H}_m$ 分别为 m 阶和（m+1）×m 阶上 Hessenberg 阵，e_m^* 表示单位阵的第 m 列向量的转置。

计算 H_m 的 m 个 Ritz 对（$\tilde{\lambda}_i$，$\tilde{\varphi}_i$）作为（λ_i，φ_i）的近似。可表示为：

$$H_my_i=\tilde{\lambda}_iy_i \tag{4}$$

$$\tilde{\varphi}_i=V_my_i \tag{5}$$

显然，若($\tilde{\lambda}_i$，y_i)为 H_m 的一个特征对，则($\tilde{\lambda}_i$，$\tilde{\varphi}_i$）=($\tilde{\lambda}_i$，V_my_i)是 A 的一个 Ritz 对。

2.3 精化 Arnoldi 算法

对 Ritz 值 $\tilde{\lambda}_i$，Ritz 向量 $\tilde{\varphi}_i$ 并不是特征向量 φ_i 的最佳近似。精化 Arnoldi 算法[7]是对确定的 Ritz 值 $\tilde{\lambda}_i$，用最佳逼近向量 $\tilde{u}_i$(称为精化 Ritz 向量)代替传统的 Ritz 向量 $\tilde{\varphi}_i$ 作为特征向量 φ_i 的近似。

对每个 Ritz 值 $\tilde{\lambda}_i$，寻找单位长度向量 $\tilde{u}_i\in K_m(A,v_1)$，使 $\|(A-\tilde{\lambda}_i)u\|$ 最小，即：

$$\|(A-\tilde{\lambda}_i)u_i\|=\min_{\substack{u\in K_m(A,v_1)\\ \|u\|=1}}\|(A-\tilde{\lambda}_i)u\|$$

则 $\tilde{u}_i$ 就是最佳逼近向量且满足：

$$\tilde{u}_i=V_m\tilde{z}_i \tag{6}$$

$$\|(A-\tilde{\lambda}_i)\tilde{u}_i\|=\sigma_{\min}(\tilde{H}_m-\tilde{\lambda}_iI) \tag{7}$$

其中：$\sigma_{\min}(\tilde{H}_m-\tilde{\lambda}_iI)$ 表示($\tilde{H}_m-\tilde{\lambda}_iI$)的最小奇异值，$\tilde{z}$ 是最小奇异值对应的右奇异向量。对于具体的子空间 $K_m(A,v_1)$，$\tilde{u}_i$ 可以通过一个小问题的奇异值分解可靠和有效的计算[7]。

2.4 隐式重启动

随着子空间维数 m 的增大，Ritz 值会逼近特征值。但实际计算中，m 要非常大时，Ritz 值才满足精度要求，可以用隐式重启动[8]来解决这一问题。

假设已选定 H_m 的 k 个特征值 λ_i，i=1,2,…,k，作为 Ritz 值，当 Arnoldi 分解进行到第 m 步时，有式(3)。将 $m-k$ 个隐式 QR 位移 μ_i，i=1,2,…,$m-k$，应用于 H_m，得：

$$(H_m-\mu_1I)(H_m-\mu_2I)\cdots(H_m-\mu_{m-k}I)=QR \tag{9}$$

其中:Q 为正交矩阵，R 为上三角矩阵。

令 $H_m^+=Q^*H_mQ$，H_k^+ 是 H_m^+ 的 $k\times k$ 阶子矩阵，$V_m^+=V_mQ=(V_k,V_{m-k})$。可得第 k 步 Arnoldi 分解：

$$AV_k^+=V_k^+H_k^++f_k^+e_k^* \tag{10}$$

然后从第 k 步开始进行 Arnoldi 分解。

2.5 精化位移

在隐式重启动位移的选取上，通常可选 H_m 不期望的特征根 λ_i 为位移，称为准确位移。

精化 Arnoldi 算法中的精化位移[9]与 Arnoldi 算法中的准确位移相对应。利用精化 Ritz 向量 $\tilde{u}_i$ 对所求特征向量逼近程度更好的特性，形成子空间 $\{\tilde{u}_i,\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_k\}$ 的正交空间 $\{\tilde{u}_i,\tilde{u}_2,...,\tilde{u}_k\}^\perp$，用正交

空间上的 Ritz 值ε_j作为位移，称ε_j为精化位移。精化位移比准确位移更逼近特征值，因为$\{\tilde{u}_i,\tilde{u}_2,\ldots,\tilde{u}_k\}^{\perp}$包含了更多的子空间信息。文献[9]给出了廉价的计算精化位移的方法。

表 1 IRRA 与 IRA 的比较

Tab.1 Comparation between IRRA and IRA

IRA				IRRA			
m	$iter$	$A\times v$	T/s	m	$iter$	$A\times v$	T/s
15	158	176	4.812	15	58	78	2.657
20	19	82	2.406	20	12	61	1.969
25	14	72	2.859	25	6	61	1.984
30	7	94	2.828	30	5	73	2.453
35	5	100	3.062	35	3	66	2.39
40	4	102	3.36	40	2	62	2.438
45	3	97	3.391	45	2	69	2.938

3 精化 Arnoldi 算法(IRRA)计算步骤

1）开始： 给定 Krylov 子空间的维数 m，位移点δ，待求特征值数 k，容许误差 tol。随机选择一个单位向量v_1作为启动向量。计算（$A-\delta I$）的 LU 分解。

2）迭代：通过 m 步 Arnoldi 分解式(3)计算上 Hessenberg 矩阵H_m，$\tilde{H}_m$以及V_m。

3）计算近似特征对：计算H_m的特征值θ_i，i=1,2,…,m。选 k 个最大的特征值作为待求特征值λ_i，i=1,2,…,k 的近似值。对每个θ_i计算精化 Ritz 向量u_i，i=1,2,…,k。

4）检查收敛性：计算特征对（θ_i，u_i），i=1,2,…,k 的残量。若残量都小于误差 tol，停机；否则继续。

5) 确定位移：计算 m-k 个精化位移作为隐式重启动的位移。

6) 隐式重启动：将隐式重启动技术应用于H_m和V_m，得到H_k^+和V_k^+。转步骤 2)。

4 算例分析

某系统有 70 台发电机，137 个节点，210 条支路，39 个负荷。发电机采用 6 阶模型，系统中每台发电机均配有励磁系统、调速系统和零增益 PSS。使用 PMT 技术建模，全系统状态矩阵为 784 阶。

表 2 特征值

Tab.2 Eigenvalues

No.	IRRA	QR	ε	f/Hz
1	-0.346 703+7.219 636i	-0.346 704+7.219 634i	0.047 97	1.149 04
2	-0.554 684+7.208 803i	-0.554 682+7.208 804i	0.076 72	1.147 32
3	-0.058 427+5.223 997i	-0.058 427+5.223 997i	0.011 18	0.831 43
4	-0.547 589+7.626 465i	-0.547 589+7.626 460i	0.071 62	1.213 79
5	-0.360 090+8.025 685i	-0.360 088+8.025 688i	0.044 82	1.277 33
6	-0.443 845+8.142 845i	-0.443 846+8.142 843i	0.054 43	1.295 97
7	-1.196 172+8.021 906i	-1.196 172+8.021 906i	0.147 48	1.276 73
8	-0.811 075+8.220 022i	-0.811 075+8.220 022i	0.098 19	1.308 26
9	-0.805 742+8.337 223i	-0.805 742+8.337 224i	0.096 19	1.326 91
10	-0.453 407+8.709 525i	-0.453 407+8.709 527i	0.051 99	1.386 16

本文的表格中，m 代表子空间维数，$Iter$ 代表迭代次数，$A\times v$ 代表矩阵向量乘积的次数，T 代表计算时间，单位为秒。f 代表频率，ε 代表阻尼比。为保证系统动态特性，阻尼比应不小于某一给定值，本文取$\varepsilon=0.1$。

4.1 IRRA 和 IRA 的比较

取位移点为 8×i，分别用隐式重启动 Arnoldi 方法(IRA)和隐式重启动精化 Arnoldi 方法(IRRA)计算位移点附近的 10 个特征值。由表 1 可以看出，随着子空间维数的增大，IRA 和 IRRA 的迭代次数减少，这是由于子空间包含的信息增加，收敛加快。但每次迭代需要的时间增加，运算时间主要消耗在矩阵与向量的乘积运算上。相同子空间维数下，IRRA 在迭代次数、矩阵和向量乘积次数和运算时间上都要好，这是由于使用精化向量和精化位移的结果。

4.2 IRRA 和 QR 法的结果比较

用 QR 法计算状态矩阵的全部特征值作为准确值，与 IRRA 的计算结果比较。取 m 为 30，计算出来的 10 个特征值如表 2 所示。由表 2 可以看出，

IRRA 计算出来的特征值与 QR 法计算出来的特征值十分接近，说明 IRRA 的计算结果是可靠的。振荡模式的频率在 0.8～1.3 Hz 之间，除模式 7 满足阻尼比要求外，其余均不满足，属于弱阻尼模式。

图 1 所示的是靠近位移点的特征值与准确值的比较结果。若想求取其它特征值，只需改变位移点。多次位移后可求得所有机电模式的特征值。

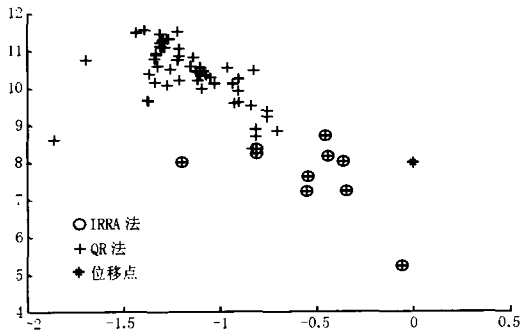

图 1 计算结果

Fig.1 Results of example

5 结论

本文应用精化 Arnoldi 算法对大型电力系统进行小信号稳定性关键特征值分析。适当选择位移点，结合位移求逆和隐式重启动技术，用精化 Arnoldi 方法计算状态矩阵靠近位移点的特征值。用精化向量代替 Ritz 向量，用精化位移代替准确位移的方法加快了算法的收敛速度，减少了重启动次数。通过对实际系统的计算验证了该方法的正确性和有效性。

参考文献

[1] Semlyen W L. Application of Sparse Eigenvalue Techniques to the Small Signal Stability Analysis of Large Power Systems [J]. IEEE Trans on PWRS, 1990, 5(2): 6352642.

[2] 谷寒雨，陈陈．一种新的大型电力系统低频机电模式计算方法[J]．中国电机工程学报，2000，20(9)：50-54.
GU Han-yu, CHEN Chen. A New Algorithm for the Computation of Low Frequency Electro-mechanical Oscillation Modes of Large Power Systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(9): 50-54 .

[3] Lee B, Song H, Kwon S-H, et al. Calculation of Rightmost Eigenvalues in Power Systems Using the Block (BACM) Arnoldi Chebyshev Method[J]. IEEE Proc on Gener, Transm and Distrib, 2003,150(1): 23–27.

[4] 杜正春，刘伟，方万良，等．基于JACOBI DAVIDSON 方法的小干扰稳定性分析中关键特征值计算[J]．中国电机工程学报，2005，25(14)：19-24.
DU Zheng-chun, LIU Wei, FANG Wan-liang, et al. A Sparse Method for the Calculation of Critical Eigenvalue in Small Signal Stability Analysis[J] . Proceedings of the CSEE, 2005, 25(14): 19-24.

[5] 钟志勇，谢志堂，王克文．适用于电力系统动态稳定分析的元件建模新方法[J]. 中国电机工程学报, 2000, 20(3): 30-33.
ZHONG Zhi-yong, XIE Zhi-tang, WANG Ke-wen. A Novel Modeling Technique for Modern Power System Dynamic Studies[J]. Proceedings of the CSEE, 2000, 20(3): 30-33 .

[6] Wang K W, Chung C Y, Tse C T, et al. Multimachine Eigenvalue Sensitivities of Power System Parameters[J]. IEEE Trans on Power Systems, 2000, 15(2): 741-747.

[7] JIA Zhong-xiao, ZHANG Yong. A Refined Shift-and-Invert Arnoldi Algorithm for Large Unsymmetric Generalized Eigenproblems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 44: 1117-1127.

[8] Sorensen D C. Implicit Application of Polynomial Filters in a k-step Arnoldi Method[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1992: 357-385.

[9] JIA Zhong-xiao. Polynomial Characterizations of the Approximate Eigenvectors by the Refined Arnoldi Method and an Implicitly Restarted Refined Arnoldi Algorithm[J].Linear Algebra and Applications, 1999: 191-214.

收稿日期：2006-09-16；　修回日期：2006-12-19

作者简介：

郑　伟(1982-)，男，研究生，主要研究方向为电力系统稳定性分析与控制; E-mail: eegszhengw@gs.zzu.edu.cn

王克文(1964-)，男，博士，教授，从事电力系统稳定性分析与控制的研究。

许继集团公司荣获河南工业创新特等奖

创新改变生活，创新赢得尊重。日前，2006 河南工业自主创新·品牌高层论坛暨河南工业创新奖表彰大会在郑州隆重举行。许继集团公司和公司董事长、总裁王纪年双双荣获“河南工业创新特等奖”。张以祥、史济春等省领导为获奖者颁奖。

此次论坛由省发展和改革委员会、省科学技术厅、省统计局、省质量技术监督局、省政府发展研究中心共同主办，省工业经济联合会具体承办。