

基于最小二乘法的正交多项式级数在谐波估计中的应用

王刚,杨洪耕

(四川大学电气信息学院,四川 成都 610065)

摘要: 利用基于最小二乘法的正交多项式级数来逼近谐波的概率密度函数并估计其 95%不超过概率值。根据电力谐波测量样本统计样本的阶矩(原点矩);对于多变量或多矢量求和,首先建立求和模型,在统计出分量阶矩的基础上通过递归方法计算和的阶矩。基于最小二乘法的思想,确定逼近的正交多项式级数展开中的待定系数。这种方法不要求谐波的幅值和相位具有某种特定分布,适用范围广。最后用实例证明了该方法的有效性。

关键词: 最小二乘法; 正交多项式; 谐波; 概率密度函数; 阶矩

中图分类号: TM74 文献标识码: A 文章编号: 1003-4897(2006)12-0025-05

0 引言

近年来,大量非线性负荷的广泛应用,使得电力系统配电网和输变电系统中产生了大量的谐波电流和电压,给系统和用户造成了极大的危害。IEC(国际电工委员会)和国标都提出了以谐波的95%不超过概率值作为谐波估计标准。

谐波源具有时变特征^[1,2],因此普遍采用概率统计的方法来对其产生的谐波电流或相应的谐波电压进行分析和估计。为了计算谐波的95%不超过概率值,首先要求获得谐波分布的概率密度函数。传统采用蒙特卡洛方法计算概率密度函数^[3,4],但计算量大,计算所耗时间长。文献[5,6]总结了电力系统中常见的三种计算概率密度函数的方法,包括Gram-Charlier级数法、Pearson法和Johnson法。Gram-Charlier级数法要求分布具有近似的正态分布,Pearson法要求分布函数满足某一特定的微分形式,而Johnson法中,不同的转换函数可能带来不同的误差,转换函数的最优选择还有待进一步探讨。因此,它们在计算谐波分布概率密度函数和谐波的95%不超过概率值时都还存在着一定的局限性。

本文采用由正交多项式组合构成的级数来逼近谐波概率密度函数,不要求谐波具有某种特定的分布,只要求有足够大的谐波样本,适合于处理各种不同分布的谐波问题。根据谐波样本获得其分布的统计特征,计算分布函数的各阶矩,利用正交多项式的特性,基于最小二乘法的思想,确定多项式级数的待定系数,进而获得逼近谐波分布的概率密度函数以及相应的95%不超过谐波概率值。

1 基于最小二乘的正交多项式级数

最小二乘法的一般提法是:对给定的一组数据 $(x_i, f(x_i)) (i = 0, 1, \dots, m)$,要求在函数类 $\text{span}\{ \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \}$ 中找一个函数 $y = s^*(x)$,使得误差平方和 $\sum_{i=0}^m (s(x_i) - f(x_i))^2$ 最小,即

$$\sum_{i=0}^m (s(x_i) - f(x_i))^2 = \min_s \sum_{i=0}^m (s(x_i) - f(x_i))^2 \quad (1)$$

这里, $f(x)$ 为分布的真实函数, $s(x)$ 为逼近 $f(x)$ 的拟合函数

$$s(x_i) = \sum_{i=0}^n \phi_i(x_i) \quad (n < m) \quad (2)$$

其中: ϕ_i 为待定系数。用几何的语言说,就称之为曲线拟合的最小二乘法。

常见的正交多项式包括拉盖尔多项式、埃尔米特多项式、勒让德多项式和雅可比多项式等,由它们组合而成的级数展开式都可以用来描述或逼近任意的函数 $f(x)$ 。本文采用拉盖尔多项式来进行说明。

拉盖尔多项式 $L_n(x)$ 是一组在正实轴上以 e^{-x} 为权函数的正交多项式,具有在正实轴上的正交性,即

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

它适合于描述在正实轴上取值的函数,因此用来逼近电力系统中谐波分布的概率密度函数是很有效的。

考虑权函数 e^{-x} ,任意在正实轴上取值的连续函数 $f(x)$ 都可以展开为由拉盖尔多项式描述的级

数形式 (具体推导过程参考文献 [7, 8]):

$$f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n L_k(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (4)$$

令 $L_k(x_i) = L_k(x_i)$, $s(x_i) = f^*(x_i) = e^{-x_i} \sum_{k=0}^n L_k(x_i)$, 利用最小二乘法的思想, 问题转化为确定 L_k ($k = 0, 1, \dots, n$) 使式 (1) 中误差平方和 $\sum_{i=0}^m (L_k(x_i) - f(x_i))^2$ 达到最小值, 即

$$\sum_{i=0}^m (e^{-x_i} \sum_{k=0}^n L_k(x_i) - f(x_i))^2 \quad (5)$$

也就是求多元函数

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m (e^{-x_i} \sum_{k=0}^n L_k(x_i) - f(x_i))^2$$

的极小点 (x_0, x_1, \dots, x_n) 问题。

由 $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), 可推得

$$\sum_{i=0}^m e^{-x_i} L_k(x_i) \sum_{k=0}^n L_k(x_i) = \sum_{i=0}^m f(x_i) L_k(x_i) \quad (6)$$

$f(x)$ 为连续函数, x 的取值范围为 0 到正无穷。当 m 取值足够大时 (理想情况为趋于无穷), 式 (6) 可以表示为积分形式

$$e^{-x} L_k(x) \int_0^{\infty} L_k(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) L_k(x) dx \quad (7)$$

代式 (3) 及 $L_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i k!}{(k-i)! (i!)^2} x^i$ 入式 (7), 得

$$k = \int_0^{\infty} f(x) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i k!}{(k-i)! (i!)^2} x^i dx = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i k!}{(k-i)! (i!)^2} v_k^i \quad (8)$$

其中: $v_k^i = \int_0^{\infty} f(x) x^i dx$, 若 $f(x)$ 是关于随机变量 X 的概率密度函数, 则 v_k^i 就是随机变量 X 的 i 阶 (原点) 矩。应用在电力系统谐波估计中, 假设取得足够大的谐波样本, 则 v_k^i 可以由谐波的样本 i 阶 (原点) 矩代替, 通过式 (8) 和式 (4) 就能计算出关于谐波电流或谐波电压的概率密度函数。

文献 [11] 提出了通过直接积分确定逼近曲线系数 L_k 的方法。值得说明一点的是, 在实际工程应用中, 对有限样本进行曲线拟合时, 最小二乘法是非常有效的, 本文基于最小二乘法的思想来推导系数

L_k , 就是为了证明由此得到的逼近曲线是最佳的, 因为它与实际曲线的误差平方和 $\sum_{i=0}^m (L_k(x_i) - f(x_i))^2$ 将是所有逼近曲线中最小的。

得到电力谐波的概率密度函数 $f(x)$ 之后, 可以通过式 (9) 计算谐波的任意 $P\%$ 不超过概率值 X_p :

$$P\% = \int_0^{X_p} f(x) dx \times 100\% \quad (9)$$

由 Laguerre 多项式的性质

$$e^{-x} L_k(x) dx = e^{-x} [L_k(x) - L_{k-1}(x)] \quad (10)$$

得

$$CP\% = \int_{X_p}^{\infty} C_k L_k(x) dx \times 100\% = e^{-X_p} \{ 1 - \sum_{k=1}^N C_k [L_k(X_p) - L_{k-1}(X_p)] \} \times 100\% \quad (11)$$

其中: $P\% + CP\% = 1$ 。例如, 要得到谐波的 95% 概率值, 在式 (11) 中令 $CP\% = 0.05$, 求解 X_p 即可, 从而避免了繁杂的积分运算。

2 阶矩的计算

由于电力系统网络结构的复杂性, 网络节点众多, 对每一节点都进行监测是不可行的。只有对某一个或某几个谐波源节点进行监测, 然后利用电力系统网络结构和谐波潮流计算的理论进行分析, 得到其它待处理节点的谐波特性。这就涉及到谐波求和的问题。又由于谐波是随机分布的矢量, 因此除了标量求和之外, 还需要考虑矢量求和。体现在上一节正交多项式逼近谐波概率密度函数中, 也就是怎样解决和量的阶矩问题, 即分量阶矩的标量合成和矢量合成问题。需要说明一点的是, 电力系统中各谐波源一般是相互独立的。

以两个随机分量为例, 首先考虑标量合成。令 X 是两个相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 的合成:

$$X = X_1 + X_2 \quad (12)$$

利用二项式展开, 则有

$$v_X^i(X) = v_{X_1+X_2}^i(X_1 + X_2) = v_{X_1+X_2}^i \cdot \left(\sum_{j=0}^i C_i^j X_1^{i-j} X_2^j \right) = \sum_{j=0}^i C_i^j v_{X_1}^{i-j} v_{X_2}^j \quad (13)$$

其中: C_i^j 为二项式系数, $C_i^j = i! / (j! (i-j)!)$ 。

随机矢量 Z 的幅值 Z 不但是随机的, 其相角也是随机的。假设两随机矢量 Z_1 和 Z_2 的合成成为:

$$\vec{Z} = X + jY \quad (14)$$

其中: $\vec{Z}_i = X_i + jY_i$, $X_i = Z_i \cos \theta_i$, $Y_i = Z_i \sin \theta_i$, $X = \sum X_i$, $Y = \sum Y_i$ ($i = 1, 2$), X_i 和 Y_i 分别为矢量 \vec{Z}_i 在 $X - Y$ 轴上的正交分量,考虑 \vec{Z}_1 和 \vec{Z}_2 , X_i 和 Y_i 相互独立,可以利用标量的合成计算 X 和 Y 的偶次阶矩:

$$v_x^{2i} = \sum_{j=0}^{2i} C_{2i}^j v_{x_1}^{2i-j} v_{x_2}^j, \quad v_y^{2i} = \sum_{j=0}^{2i} C_{2i}^j v_{y_1}^{2i-j} v_{y_2}^j \quad (15)$$

由式 (14) 得, $Z^2 = X^2 + Y^2$, 则合成矢量 Z 幅值 Z 的偶次阶矩

$$v_z^{2i} = v(X^2 + Y^2)^i = \sum_{j=0}^i C_i^j v_x^{2i-2j} v_y^{2j} \quad (16)$$

式 (4) 中, 令 $x = \frac{z^2}{v_z}$, 则 $f(\frac{z^2}{v_z}) = e^{-z^2} \sum_{k=0}^{\infty} L_k(\frac{z^2}{v_z})$, 对应式 (8) 中待定系数 k 的确定只需要已知式 (16) 计算所得到的幅值 Z 的偶次阶矩 v_z^{2i} 就可以了。值得说明一点的是, 与传统的矢量求和方法不同之处在于, 本文所用方法中矢量的相角在 $0 \sim 2\pi$ 可以是任意分布, 而不要求满足在 $0 \sim 2\pi$ 均匀分布, 因此具有更广泛的适用性。

利用同样的方法进行多次递归计算, 多个随机变量或矢量求和的阶矩也可以得到。计算得和量的阶矩后, 相应的谐波和的概率密度函数和 95% 不超过概率值就可以确定了。

另外, Laguerre 多项式是在正实轴上无穷项展开, 计算时只截取有限项出现截断误差, 还会在 X 轴两侧出现振荡, 文献 [7, 9, 10] 对其误差进行了讨论。本文经过反复的仿真实验发现, 对随机变量的阶矩进行标准化, 将有效地加速逼近函数曲线的收敛, 从而减小逼近误差。本文采用随机变量二阶矩的平方根作为标准化基准值, 则标准化后的各阶矩为:

$$(v_x^i)_{\text{标准化}} = \frac{v_x^i}{(\sqrt{v_x^2})^i} \quad (17)$$

文献 [11] 还引入了尺度因子和修正系数来减小拟合曲线的误差, 这对提高 Laguerre 多项式求和逼近随机变量概率密度函数的精确性起到了一定的改善作用。但是, 本文通过标准化各阶矩的方法极大地加速了拟合曲线的衰减, 使得振荡不明显, 已经没有必要再采取截取的方法 (即引入尺度因子和修正系数) 来进行修正。从实例分析中也可以看出, 比较文献 [11], 本文拟合曲线的误差大大减小了。

3 实例分析

在电气化铁道中, 电铁牵引负荷产生大量谐波, 对其谐波的监测和治理已经越来越引起人们的重

视。本文首先对某电网由电铁牵引负荷在 110 kV 母线上产生的谐波电流进行统计分析, 用横河 WT1600 谐波分析仪测量得到的两个工作日的数据 (每分钟一个记录值) 作为计算样本, 利用前文的方法求逼近谐波电流分布的概率密度函数 (阶矩取到 20 阶) 并作其曲线图, 如图 1 中规则曲线所示, 与实际测量值统计得到的谐波电流分布曲线 (图 1 中不规则曲线) 进行比较, 最后比较谐波电流的 95% 概率值, 并计算出相对误差, 如表 1 所示。由于电铁牵引负荷产生的谐波电流主要以低次存在, 本文分析了 3、5、7、9、11 次谐波。其中,

$$\text{误差} = \frac{|\text{估计值} - \text{真实值}|}{\text{真实值}} \times 100\%$$

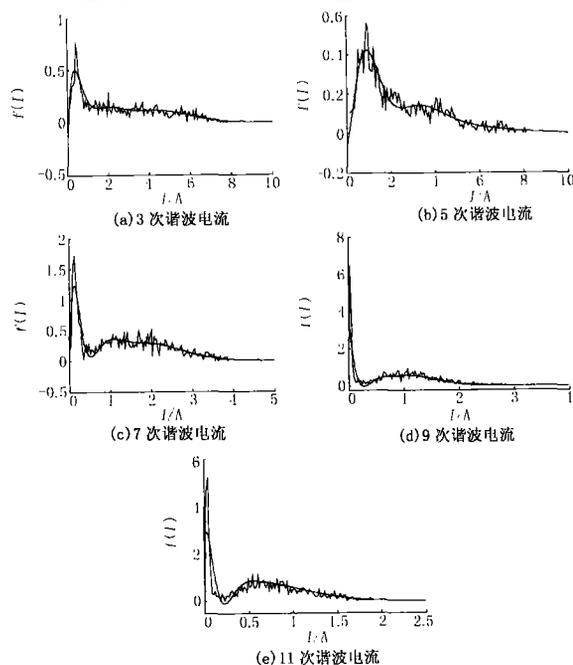


图 1 电铁牵引负荷谐波电流概率密度函数

Fig 1 Probability density function of electric locomotive load's harmonic currents

表 1 电铁牵引负荷谐波电流 95% 概率值

Tab 1 95% probability values of electric locomotive load's harmonic currents

	真实值 /A	估计值 /A	误差 / (%)
3次	6.17	6.2	0.49
5次	6.05	6	0.83
7次	3.14	3.09	1.59
9次	1.978	1.98	0.10
11次	1.465	1.46	0.34

下面再对某电网 110 kV 节点进行谐波求和分析。如图 2 所示, M 点母线带有 A、B 两台 20 吨电弧炉, 电弧炉侧装有 5、7 次单调谐滤波器及 12 次高

通滤波器(未投入)。工作时用横河 WT1600 谐波分析仪分别测量变压器 110 kV 高压侧谐波电流(包括幅值和相位),每分钟记录一次,取 3 个工作日的数据进行谐波的求和分析。电力系统中的低次谐波一般不具有 0~2 均匀分布,利用前文所介绍的求和处理方法,求得两台电弧炉谐波电流和的概率密度函数(阶矩取到 20 阶)并作其曲线图,如图 3 中规则曲线所示,与由实际测量值求和统计得到的谐波电流分布曲线(图 3 中不规则曲线)进行比较,最后比较谐波电流的 95% 概率值,并计算出相对误差,如表 2 所示。所分析的谐波次数取 3、5、7、9、11、13 次。

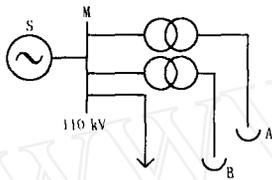


图 2 电弧炉供电系统简图

Fig 2 Diagram of power supply system for arc furnace

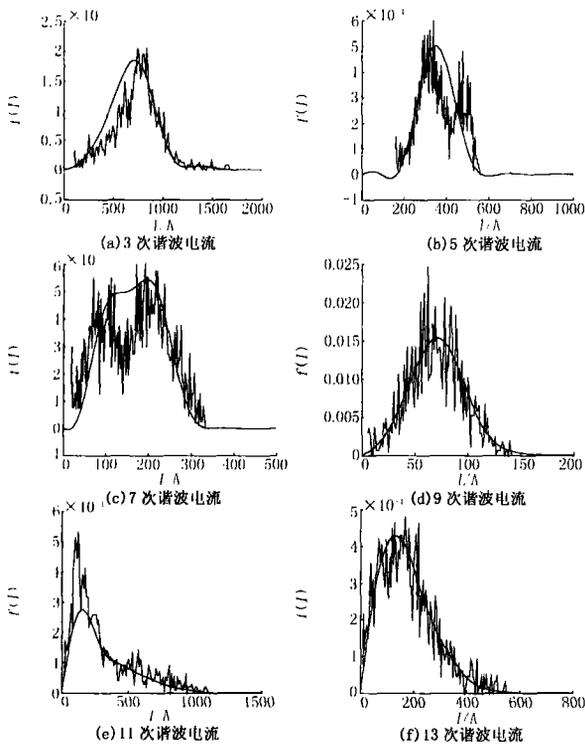


图 3 电弧炉谐波电流和的概率密度函数

Fig 3 Probability density function of summation of arc furnaces' harmonic currents

表 2 电弧炉谐波电流和的 95% 概率值

Tab 2 95% probability values of summation of arc furnaces' harmonic currents

	真实值 /A	估计值 /A	误差 / (%)
3次	1 022	1 039	1.66
5次	499	477	4.41
7次	280	266	5
9次	114	115	0.88
11次	796	746	6.28
13次	372	357	4.03

由两个实例分析可以看出,逼近曲线在主瓣之外衰减很快,几乎不再有什么振荡,很好地拟合了谐波的实际分布。由以上计算结果还可以看出,由于正交多项式只能展开有限项出现的截断误差,以及实际分布概率密度函数的不连续性带来的误差,使得逼近概率密度函数与实际分布函数有一定差异,但是,另一方面,通过逼近函数得到的 95% 概率值与实际的 95% 统计值之间有很好的逼近,最大相对误差仅为 6.28%,因此,用此方法估计谐波的 95% 概率值是有效的。

4 结论

1) 利用基于最小二乘法的正交多项式级数展开可以逼近任意分布的电力谐波概率密度函数,不要求其幅值和相位满足某种特定分布。对于参与求和的谐波不要求它的相位满足 0~2 均匀分布。

2) 通过变量分布的矩来确定分布的概率密度函数,通过求解方程(11)来估计电力谐波的 95% 概率值,避免了繁杂的积分运算,计算更方便快捷。

3) 用实际算例证明了此方法的有效性,采用谐波变量二阶矩的平方根作为标准化基准值是可行的,这极大地减小了逼近曲线与实际分布的误差,在工程上是可以接受的。

参考文献:

- [1] Probabilistic Aspects Task Force of Harmonics Working Group. Time-varying Harmonics, Part 1: Characterising Measured Data [J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1998, (3): 938-944.
- [2] Probabilistic Aspects Task Force of Harmonics Working Group. Time-varying Harmonics, Part 2: Harmonic Summation and Propagation [J]. IEEE Trans on Power Delivery, 1998, (4).
- [3] Carbone R, Capinelli G, Morrison R E, et al A Review of Probabilistic Methods for the Analysis of Low Frequency Power System Harmonic Distortion-9th IEE Internat-

- tional Conference on Electromagnetic Compatibility, Manchester(UK): 1994. 148-155.
- [4] Capinelli G, Esposito T, Varibone P, et al First Order Probabilistic Harmonic Power Flow [J]. IEE Proc—Gener, Transm and Distrib, 2001, 149 (6): 541-548
- [5] Esposito T, Varibone P. Some Approaches to Approximate the Probability Density Functions of Harmonics[A]. Proceedings 10th International Conference on Harmonics and Quality of Power 2002. 365-372
- [6] Capinelli G, Esposito T, Varibone P, et al Probabilistic Harmonic Power Flow for Percentile Evaluation-IEEE Int [A]. Conference on Technology for the Millennium. Toronto (Canada): 2001.
- [7] Abdi A, Homayoun H. On the PDF of Random Vectors [J]. IEEE Trans on Communication, 2000, 48 (1): 7-11.
- [8] Primak S, Vetri J L, Roy J. On the Statistics of a Sum of Harmonic Waveforms[J]. IEEE Trans on Electromagnetic Compatibility, 2002, 44 (1): 266-270.
- [9] Tian W D, Sutanto D, Lee Y B, et al Cumulant Based Probabilistic Power System Simulation Using Laguerre Polynomial [J]. IEEE Trans on Energy Conversion, 1989, 4 (4): 567-574.
- [10] 田卫东. 以高阶累积量和高阶正交多项式级数展开式为基础的电力生产随机概率模拟方法 [J]. 电网技术, 1995, 19 (1): 31-34
TIAN Wei-dong Cumulant Based Probabilistic Simulation of Power Production Using High Order Orthogonal Polynomial Expansions[J]. Power System Technology, 1995, 19 (1): 31-34.
- [11] 杨洪耕, 王磊. 基于拉盖尔多项式的非线性负荷谐波发射水平估计 [J]. 中国电机工程学报, 2005, 25 (7): 81-85.
YANG Hong-geng, WANG Lei Emission Levels from Non-loads Using Laguerre Polynomials [J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25 (7): 81-85.

收稿日期: 2006-01-23; 修回日期: 2006-02-21

作者简介:

王刚 (1981-), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统谐波分析; E-mail: wg216@163.com

杨洪耕 (1949-), 男, 教授, 长期从事电能质量与谐波的研究工作。

Application to harmonics' statistic with orthogonal polynomials series based on least squares method

WANG Gang, YANG Hong-geng
(Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: This paper uses orthogonal polynomials series based on least squares method to approximate probability density function of harmonics and estimate 95% non-exceeding probability values. According to the measurement samples, the statistic moments of samples (about zero) can be obtained. For summation of several variables or vectors, it needs to construct the summation models firstly, the summation's moments can be obtained by recursive calculation after the components' moments are known. Using the concept of least squares method to determine the need determining coefficients of the approximating probability density function series expansion, this method doesn't require that the amplitudes and phases have any fixed distributions, so it can be used widely. At last, this paper employs actual examples to prove the efficiency of the approach presented.

Key words: least squares method; orthogonal polynomials; harmonics; probability density function; moments

中国电力系统保护与控制学术研讨会组委会通知

“中国电力系统保护与控制学术研讨会”预定于 2006 年 9 月 19 日 - 23 日 (19 日报到) 在广东珠海隆重召开, 敬邀各单位和专家向大会投稿并届时参加。会议论文征稿截止日期延长至 7 月 15 日。

会议组委会领导机构:

大会名誉主席: 陆燕荪 (原机械工业部副部长、中国机械工业联合会特别顾问)

大会主席: 卢强 (中国科学院院士、清华大学教授)

大会副主席: 段献忠 (华中科技大学教授) 董新洲 (清华大学教授) 郭志忠 (哈尔滨工业大学教授)

姚致清 (许昌继电器研究所所长) 庞江华 (珠海万力达电气股份有限公司董事长兼总经理)

秘书长: 韩万林 (《继电器》杂志社主编) 副秘书长: 张志强 (《继电器》杂志社编辑部主任)

会议征文内容和征文办法等详细信息请登录:

<http://www.powerkingdom.com/news>