

# 剖析非线性负荷的无功功率

周勇<sup>1</sup>, 王文峰<sup>1</sup>, 赵慧光<sup>1</sup>, 秦晓军<sup>2</sup>

(1. 郑州大学电气工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 新乡供电公司, 河南 新乡 453002)

**摘要:** 非线性负荷的无功功率是一个值得关注的问题, 传统意义上的无功功率概念已不能全面地对其进行解释。为了能够准确地计算和理解非线性负荷的无功功率, 该文采用傅立叶分析方法, 导出了非线性负荷的无功功率的计算公式, 并且分析了公式中每一项的物理意义, 最后通过算例验证了公式的完整性。只要选取合适的采样频率, 计算精度就能够满足要求。

**关键词:** 非线性负荷; 频域无功功率; 畸变功率; 无功功率

**中图分类号:** TM714 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-4897(2006)10-0085-04

## 0 引言

随着电力电子技术的不断进步, 电网中的非线性负荷也在逐年增加, 这些负荷会引起电压电流的波形发生畸变, 从而产生一系列高次谐波, 使负荷的功率因数下降, 严重时还会干扰电网的正常运行, 给电能质量带来一些不利的影 响。因此, 非线性负荷的无功功率是一个值得关注的问题。然而, 传统意义上的无功功率概念已不能全面地对其进行解释, 在近年来出版的一些专著中, 也有提到非线性负荷的无功功率, 但是仔细推敲后会发现其中给出的计算公式都不是很完整, 对于物理意义的描述也不是很清晰。本文将推导出非线性负荷的无功功率的计算公式, 并对其物理意义给出全面的描述。

## 1 交流正弦电路的功率

设交流正弦电路的电压和电流分别为:

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (1)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (2)$$

上式中的  $\varphi_u$  和  $\varphi_i$  分别表示电压和电流的初相角,  $U$  和  $I$  分别表示电压和电流的有效值。在电气设计和计算中, 通常将电压有效值和电流有效值的乘积定义为视在功率, 记为  $S$ 。即

$$S = UI \quad (3)$$

电路吸收的瞬时功率  $p$  定义为电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的乘积:

$$\begin{aligned} p &= u(t) i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \times \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= UI \cos[\omega t + \varphi_u] \cos[\omega t + \varphi_i] \\ &= UI \cos[\varphi_u - \varphi_i] \cos[2\omega t + \varphi_u + \varphi_i] \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  为电压电流之间的相位差, 其值介于  $\pm 90^\circ$  之

间, 因此, 式 (4) 中的第一项总是大于或等于零, 它是瞬时功率中的不可逆部分; 第二项正负交替, 它是瞬时功率的可逆部分, 这说明能量在外施电源与负荷之间来回交换<sup>[1]</sup>。

定义有功功率:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = UI \cos \varphi \quad (5)$$

当谈及无功功率的定义时, 文献 [1] 中的表述是: “在工程中还引用无功功率的概念, 用大写字母  $Q$  表示, 其定义为

$$Q = UI \sin \varphi \quad (6)$$

它与瞬时功率的可逆部分有关。这就是关于无功功率的定义, 工程上通常采用这个计算量。”

显然:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (7)$$

现在的问题是, 为什么要采用这个计算量? 它的物理意义是什么? 许多教材中都没有给出确切的解释。因此, 无功功率在人们的印象中形成了一个比较抽象的概念。

再来看看《辞海》对于无功功率的解释: “具有电感和电容的交流电路中, 电感的磁场和电容的电场在一周期的一部分时间内从电源吸收能量, 另一部分时间内将能量返回电源。在整个周期内平均功率是零, 也就是没有能量消耗, 但能量是在电源和电感或电容之间来回交换的, 能量交换的最大值叫做无功功率。”

这个解释说明, 在具有电感和电容的交流电路中, 无功功率就是这些储能元件和电源之间的能量交换的最大值, 它使我们看清了无功功率的特征在于能量交换。但是, 在一些非线性电路中, 比如带有

电阻负载的单相可控整流电路,没有储能元件,但是通过检测和分析可以看出,负载和电源之间也有能量交换。再比如直流输电技术当中的整流侧和逆变侧都要消耗大量的无功功率,其数量往往能占到直流输电送电功率的 40% ~ 60%。这些现象又该怎么解释呢?

## 2 非线性负荷的无功功率

非线性负荷的主要特点就是电压和电流的波形都会发生畸变。为了便于分析和计算,可以将电压和电流写成傅立叶级数的形式(保留前  $N$  项),即

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \sqrt{2} U_n \sin(n_1 t + \varphi_n) \quad (8)$$

$$i(t) = \sum_{n=1}^N \sqrt{2} I_n \sin(n_1 t + \psi_n) \quad (9)$$

式中:  $U_n$  和  $\varphi_n$  分别表示  $n$  次谐波电压的有效值和初相角,  $I_n$  和  $\psi_n$  分别表示  $n$  次谐波电流的有效值和初相角,对应的总电压有效值、总电流有效值和视在功率分别为:

$$U = \sqrt{\sum_{n=1}^N U_n^2} \quad (10)$$

$$I = \sqrt{\sum_{n=1}^N I_n^2} \quad (11)$$

$$S = \sqrt{\sum_{n=1}^N U_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N I_n^2} \quad (12)$$

根据有功功率的定义,并且考虑到三角函数的正交性可得:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \sum_{n=1}^N U_n I_n \cos \varphi_n \quad (13)$$

式中:  $\varphi_n$  为第  $n$  次谐波电流滞后  $n$  次谐波电压的相角,  $U_n I_n \cos \varphi_n$  是由  $n$  次谐波电压和  $n$  次谐波电流共同作用所产生的  $n$  次谐波有功功率。

对于非线性负荷的无功功率的定义,在一些相关文献中都是沿用由 C. Budeanu 于 1927 年仿照式 (13) 给出的频域无功功率的定义,即:

$$Q_f = \sum_{n=1}^N U_n I_n \sin \varphi_n \quad (14)$$

显然,式中的  $U_n I_n \sin \varphi_n$  是由  $n$  次谐波电压和  $n$  次谐波电流共同作用所产生的  $n$  次谐波无功功率,它反映的是按照  $n$  次谐波的频率进行能量交换的最大值。

由式 (12) 可得:

$$S^2 = \sum_{n=1}^N U_n^2 \sum_{n=1}^N I_n^2 = \sum_{n=1}^N U_n^2 I_n^2 + \sum_{n=1}^{N-1} U_n^2 \sum_{m=n+1}^N I_m^2 +$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} I_n^2 \sum_{m=n+1}^N U_m^2 \quad (15)$$

由式 (13) (14) 可得:

$$P^2 + Q_f^2 = \left( \sum_{n=1}^N U_n I_n \cos \varphi_n \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2 = \sum_{n=1}^N U_n^2 I_n^2 \cos^2 \varphi_n + 2 \sum_{n=1}^{N-1} U_n I_n \cos \varphi_n \cdot \sum_{m=n+1}^N U_m I_m \cos \varphi_m + \sum_{n=1}^N U_n^2 I_n^2 \sin^2 \varphi_n + 2 \sum_{n=1}^{N-1} U_n I_n \sin \varphi_n \sum_{m=n+1}^N U_m I_m \sin \varphi_m \quad (16)$$

显然

$$S^2 = P^2 + Q_f^2 \quad (17)$$

因此,仅用式 (14) 计算非线性负荷的无功功率就会产生误差,这说明式 (14) 所表示的无功功率是不完整的。将这个误差记为  $D$ ,且定义:

$$D^2 = S^2 - (P^2 + Q_f^2) \quad (18)$$

将 (15) (16) 代入 (18) 可得:

$$D^2 = \sum_{n=1}^{N-1} U_n^2 \sum_{m=n+1}^N I_m^2 (\cos^2 \varphi_m + \sin^2 \varphi_m) + \sum_{n=1}^{N-1} I_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n) \sum_{m=n+1}^N U_m^2 - 2 \sum_{n=1}^{N-1} U_n I_n \cos \varphi_n \sum_{m=n+1}^N U_m I_m \cos \varphi_m - 2 \sum_{n=1}^{N-1} U_n I_n \sin \varphi_n \sum_{m=n+1}^N U_m I_m \sin \varphi_m = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N (U_n I_m \cos \varphi_m - U_m I_n \cos \varphi_n)^2 + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N (U_n I_m \sin \varphi_m - U_m I_n \sin \varphi_n)^2 \quad (19)$$

$$D_{mnp}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N (U_n I_m \cos \varphi_m - U_m I_n \cos \varphi_n)^2 \quad (20)$$

$$D_{mnp}^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^N (U_n I_m \sin \varphi_m - U_m I_n \sin \varphi_n)^2 \quad (21)$$

$$D = \sqrt{D_{mnp}^2 + D_{mnpq}^2} \quad (22)$$

在式 (20) 中,  $I_n \cos \varphi_n$  为  $n$  次谐波电流的有功分量,  $D_{mnp}$  中包含了各次谐波电压与其它不同次谐波电流的有功分量的乘积; 在式 (21) 中,  $I_n \sin \varphi_n$  为  $n$  次谐波电流的无功分量,  $D_{mnpq}$  中则包含了各次谐波电压与其它不同次谐波电流的无功分量的乘积。它们都是由于电压电流的波形畸变后产生的谐波所

致,故可将  $D$  称为畸变功率。因为谐波电压和谐波电流的频率不同,由三角函数的正交性可知,对应的瞬时功率在一个周期内的平均值为零,所以畸变功率也具有无功功率的特征,它应该是非线性负荷无功功率的一个组成部分。

由式 (18)可知:

$$S^2 = P^2 + Q_f^2 + D^2 \quad (23)$$

仿照 (7)式可得,非线性负荷的无功功率与频域无功功率和畸变功率的关系为:

$$Q = \sqrt{Q_f^2 + D^2} \quad (24)$$

利用上式就可以完整地计算非线性负荷的无功功率。

由于无功功率反映的是电源与负荷之间进行能量交换的能力,在一个周期内的不同时刻,能量的大小和流向都会发生周期性的变化,因此,所谓“发出无功”和“消耗无功”的说法都是不严谨的。

### 3 算例

以带电阻负载的单相全控桥式整流电路(如图 1所示)为例,计算非线性负荷的无功功率。

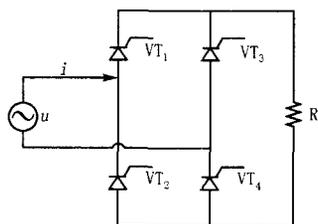


图 1 带电阻负载的单相桥式全控整流电路

Fig 1 Single-phase full-wave bridge circuit with resistor load

设输入电压为:

$$u(t) = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sqrt{2}U_3 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3)$$

其中:  $\varphi_1 = 0^\circ$ ;  $\varphi_3 = 30^\circ$ ;  $U_1 = 70.71 \text{ V}$ ,  $U_2 = 0 \text{ V}$ ,  $U_3 = 7.07 \text{ V}$ 。对应的电压有效值为  $71.1 \text{ V}$ 。

当晶闸管的导通角等于  $\pi/6$ ,且  $R = 1 \Omega$  时,负荷电流的波形如图 2所示。

利用积分直接求得电路的有功功率为:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \frac{U_n^2}{R} \sin^2(n\omega_1 t + \varphi_n) d(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \frac{U_n^2}{R} \sin^2(n\omega_1 t + \varphi_n) d(\omega_1 t) = 4.8133 \text{ W}$$

下面来验证前面推导的计算公式。

首先采用傅立叶分析方法,计算出负荷电流中各次谐波电流的幅值和初相角,计算结果如表 1所

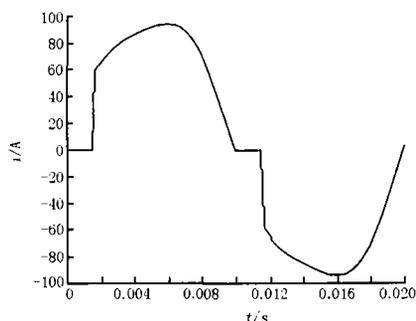


图 2 负荷电流的波形图

Fig 2 Waveform of load current

示。由于该电流波形满足奇对称条件,所以分析结果中只有奇次谐波,没有偶次谐波。为了保证计算精度,采样频率取为  $40000 \text{ Hz}$ ,最高次的谐波分量计到 49次。

表 1 负荷电流的傅立叶分析结果

Tab 1 Data of load current with Fourier analysis

谐波	谐波电流有效值 /A	含有率 / (%)	相位 / (°)
1	68.54	100	-6.33
3	0.54	0.78	-101.87
5	6.44	9.39	174.15
7	5.13	7.49	133.36
9	3.74	5.45	88.81
11	2.51	3.66	33.61
13	1.74	2.53	-28.63
15	1.55	2.27	-99.79
17	1.62	2.36	-161.00
19	1.58	2.31	145.53
21	1.39	2.02	92.93
23	1.12	1.64	35.59
25	0.94	1.37	-29.44
27	0.92	1.34	-95.85
29	0.96	1.40	-155.63
31	0.94	1.38	149.62
33	0.85	1.24	94.96
35	0.72	1.06	35.81
37	0.65	0.94	-29.17
39	0.65	0.95	-93.87
41	0.68	1.00	-152.82
43	0.67	0.98	152.06
45	0.61	0.89	96.43
47	0.54	0.78	36.31
49	0.49	0.72	-28.64

利用 (13)式计算出有功功率为:

$$P^n = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 70.71 \times 68.54 \times \cos 6.33^\circ + 7.07 \times 0.54 \times \cos(30^\circ - 101.87^\circ) = 4.81730 - 2.53 = 4.8148 \text{ W}$$

该结果与前面利用积分直接求得电路的有功功率  $P$  相差很小,这说明采样频率和最高次谐波分量

的取值能够满足精度要求。

利用式 (11) 计算出电流的有效值为:

$$I = 69.4 \text{ A}$$

利用式 (12) 得出的视在功率为:

$$S = 4930.2 \text{ VA}$$

利用式 (14) 计算出频域无功功率为:

$$Q_f = 537.0 \text{ Var}$$

利用式 (22) 计算出畸变功率为:

$$D = 909.6 \text{ Var}$$

利用式 (23) 得出的视在功率为:

$$S = 4929.3 \text{ VA}$$

对比  $S$  和  $s$  可以看出, 两种方法的计算结果基本相同, 因而使公式 (24) 的完整性得以验证。在  $S$  和  $s$  的计算过程中, 由于都涉及到电流波形的傅立叶分解和一系列的三角函数运算, 引入一些计算误差也是不可避免的。

将以上计算出的频域无功功率  $Q_f$  和畸变功率代入式 (24) 可得单相全控整流电路的无功功率为:

$$Q = 1056.3 \text{ Var}$$

#### 4 结论

非线性负荷无功功率的计算、检测和补偿应该引起有关部门的关注。由于非线性负荷的电压和电流中含有一系列高次谐波, 在计算无功功率时, 如果只计算频域无功功率, 而忽略畸变功率, 就会产生一定的误差。本文所推导的非线性负荷的无功功率计算公式是完整的, 公式中的每一项都有确切的物理意义, 这对于全面理解非线性负荷的无功功率和深入研究非线性负荷的补偿方法都是很有意义的。只要选取合适的采样频率和最高次谐波分量, 计算精度就能够满足要求。

#### 参考文献:

- [1] 邱关源. 电路 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.  
QU Guan-yuan. Circuitry[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999.
- [2] 苑舜, 韩水. 配电网无功优化及无功补偿装置 [M]. 北京: 中国电力出版社, 2003.  
YUAN Shun, HAN Shui. Distribution System Reactive Power Optimization and Reactive Power Compensation Equipments[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2003.
- [3] 程浩忠, 吴浩. 电力系统无功与电压稳定性 [M]. 北京: 中国电力出版社, 2004.  
CHENG Hao-zhong, WU Hao. Power System Reactive Power and the Voltage Stability[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2004.
- [4] 王兆安, 杨君, 刘进军. 谐波抑制和无功功率补偿 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1998.  
WANG Zhao-an, YANG Jun, LIU Jin-jun. Harmonics Elimination and Reactive Power Compensation[M]. Beijing: China Machine Press, 1998.
- [5] 吴克昌, 孙树勤, 宋文南, 等. 电力系统谐波 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1988.  
WU Jing-chang, SUN Shu-qin, SONG Wen-nan, et al. Power System Harmonics[M]. Beijing: Hydraulic and Electric Power Press, 1998.

收稿日期: 2005-10-18; 修回日期: 2005-11-25

作者简介:

周勇 (1957 - ), 男, 副教授, 研究方向为电力系统谐波分析; E-mail: zhouy@zzu.edu.cn

王文峰 (1981 - ), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统谐波分析;

赵慧光 (1981 - ), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统谐波分析。

#### Analysis of reactive power of non-linear load

ZHOU Yong<sup>1</sup>, WANG Wen-feng<sup>1</sup>, ZHAO Hui-guang<sup>1</sup>, QIN Xiao-jun<sup>2</sup>

(1. School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China;

2. Xinxiang Power Supply Company, Xinxiang 453002, China)

**Abstract:** Reactive power of non-linear load is a tough problem to tackle, and the traditional reactive power concept can't explain it now. In order to calculate and understand the reactive power of non-linear load accurately, the calculation formula of the non-linear load reactive power is concluded by means of the Fourier analysis method. The physical meaning of every item in formulae is analysed. Finally, the integrity of the formula is proved through an example. So long as suitable sampling frequency and the suitable highest order harmonic are chosen, the precision will meet the demands.

**Key words:** non-linear load; reactive power of frequency domain; distortion power; reactive power