最小二乘算法的测量误差分析

刘和平[1],徐育军[1],张学涛[2]
(1. 重庆大学电气工程学院,重庆 400044; 2. 许继电气公司,河南 许昌 461000)

摘要: 在微机保护中可以利用最小二乘算法来计算故障电流的基波和谐波分量。对此算法中系数矩阵对测量误差的影响进行了分析,并与全波傅氏算法的系数对测量误差的影响进行对比,对实现短数据窗的最小二乘算法的难点进行了探讨,得出了结论。

关键词: 微机保护; 最小二乘算法; 全波傅氏算法

中图分类号: TM744 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-4897(2006)02-0006-04

0 引言

在微机保护中,保护的算法决定了保护设备的性能。提高保护算法的精度和速度可以使保护准确、快速、灵敏地检测出故障。尽管当今计算机芯片运算速度和计算精度得到了大幅度的提高,但它们仍然是保护算法要解决的关键问题。文献[1～3]对最小二乘算法进行了详细阐述,并指出最小二乘算法除具有滤波特性好、精度高的特点外,还有数据窗可变的优点。但是在短数据窗的情况下,最小二乘算法的系数对测量误差具有明显的放大作用,以致计算出来的结果和实际值相差很大。

1 最小二乘算法的基本原理

最小二乘算法的基本原理是将输入数据与预先设计好的含有非周期分量和某些谐波分量的函数按最小二乘法原理进行拟合,从中求出输入信号中所包含的基频分量和各种谐波分量的幅值和相角。

为便于下面的分析和计算,假设系统故障的暂态电流包含有衰减性直流分量和小于6次谐波的各种整数次谐波分量,则可给定电流表达式:

$$i(t) = I_0 e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{5} I_k \sin(k\omega_1 t + \phi_k) + w \quad (1)$$

式中: I_0是衰减直流分量的初始值,λ是直流分量的衰减时间常数τ的倒数,I_k和ϕ_k是k次谐波的幅值和相角,ω_1是基波频率,w是测量过程中的误差(包括非整数次谐波和噪声等)。衰减直流分量按泰勒级数展开取前两项可满足实际工程的精度要求,于是式(1)化为:

$$i(t) = I_0 - I_0\lambda t + \sum_{k=1}^{5} I_k \sin(k\omega_1 t)\cos\phi_k + \sum_{k=1}^{5} I_k \cos(k\omega_1 t)\sin\phi_k + w \quad (2)$$

在式(2)中,待求量是: I_0, $-I_0\lambda$, $I_1\cos\phi_1$, $I_1\sin\phi_1$, …, $I_5\cos\phi_5$, $I_5\sin\phi_5$;通过N次连续采样,可得如下矩阵形式的测量值与待求量的方程组:

$$I = AX + W \quad (3)$$

上式中: $I = [\ i(t_1)\ \ i(t_2)\cdots i(t_N)\ ]^T$

$X = [\ I_0\ \ -I_0\lambda\ \ I_1\cos\phi_1\ \ I_1\sin\phi_1 \cdots I_5\cos\phi_5\ \ I_5\sin\phi_5\ ]^T$

$W = [\ w_1\ \ w_2 \cdots w_N\ ]^T$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \sin\omega_1 t_1 & \cos\omega_1 t_1 & \cdots & \sin5\omega_1 t_1 & \cos5\omega_1 t_1 \\ 1 & t_2 & \sin\omega_1 t_2 & \cos\omega_1 t_2 & \cdots & \sin5\omega_1 t_2 & \cos5\omega_1 t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_N & \sin\omega_1 t_N & \cos\omega_1 t_N & \cdots & \sin5\omega_1 t_N & \cos5\omega_1 t_N \end{bmatrix}$$

I阵是采样时刻t_1、t_2、…、t_N的采样值,是已知矩阵;A阵在t_1和采样周期确定后是常数矩阵; W阵是对应于采样值的测量误差矩阵,是未知矩阵; X是待求量矩阵。

由式(3)可得: $W = I - AX$

定义使$\|W\|_2$为最小的解$\bar{X}$是$AX = I$的最小二乘解。$AX = I$是超定方程组,根据超定方程组最小二乘解的定理可得如下的正规方程组[4]:

$$A^T A\bar{X} = A^T I \quad (4)$$

设A阵的秩为N,则A^TA是$N\times N$的对称正定阵,必有$\det(A^TA) > 0$,故式(4)的解存在且唯一:

$$\bar{X} = [A^TA]^{-1}A^T I$$

令$B = [A^TA]^{-1}A^T$,则可得:

$$\bar{X} = BI \quad (5)$$

求出最小二乘解后,利用下面两式就可得到各次谐波分量的幅值和相角:

$$I_k = \sqrt{(I_k\cos\phi_k)^2 + (I_k\sin\phi_k)^2}$$

$$\phi_k = \arctan\frac{I_k \sin\phi_k}{I_k \cos\phi_k} \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

最小二乘算法可提取各种不同的分量,只需要在预设的模型中加入该分量即可。为了减少实时计算量,文献[5]对递推最小二乘法进行了深入的分析。文献[6]提出了预设模型中不包含衰减直流分量的最小二乘算法,该算法是将衰减直流分量当成补偿量,从而使预设的模型中只有周期分量,通过增加2个采样值来计算衰减直流分量,并将其补偿掉。

2　最小二乘算法的测量误差分析

2.1　预设模型中包含衰减直流分量

2.1.1　由系数矩阵B分析

由于A是常系数矩阵,所以式(5)中的B也是常系数矩阵。根据上面的假设,A阵为$N\times 12$,则B阵为$12\times N$;以X_i表示$\bar{X}$中第i行的元素,以B_{ij}表示B阵中第i行第j列的元素,以I_i表示I中第i行的元素,则式(5)可化为:

$$X_i = \sum_{j=1}^{N} B_{ij} I_j \quad i = 1, 2, \cdots, 12 \tag{6}$$

用ΔI_i表示I_i的测量误差,ΔX_i表示X_i的误差,则可得:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \Delta I_j \quad i = 1, 2, \cdots, 12 \tag{7}$$

从式(7)可以看出,如果系数矩阵B的元素B_{ij}较大,ΔX_i也会较大,特别是当ΔI_i的最大值和B_{ij}的最大值相乘时,忽略其他采样点的误差,ΔX_i就会取得最大值。这是必然发生的,因为随着数据窗起点向后推移,B_{ij}的最大值会和每个采样值相乘,所以必须对B阵进行分析,才能控制ΔX_i的大小。

下面以每周波采样32点为例,来计算不同N值所得到的B阵。采样周期$T_S = 0.625$ ms,A阵中t_1取T_S,$\omega_1 = 2\pi f_1 = 100\pi$。于是可得:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T_S & \sin 100\pi T_S & \cos 100\pi T_S & \cdots & \sin 500\pi T_S & \cos 500\pi T_S \\ 1 & 2T_S & \sin 200\pi T_S & \cos 200\pi T_S & \cdots & \sin 1000\pi T_S & \cos 1000\pi T_S \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & NT_S & \sin 100\pi NT_S & \cos 100\pi NT_S & \cdots & \sin 500\pi NT_S & \cos 500\pi NT_S \end{bmatrix}$$

为了简便,仅把基波在B阵中对应的第3行(实部)和第4行(虚部)的最大绝对值列在表1中。

表1　$T_S = 0.625$ ms时B阵中第3、4行在不同N下的最大绝对值

Tab. 1　Maximal absolute value in row 3 and 4 of matrix B when $T_S = 0.625$ ms

N	12	16	20	24	26	28	30	32	34
$\lvert\max(B_{3j})\rvert$	641 026	1 356.6	166.57	20.033	6.466	1.982	0.876	0.393	0.186
$\lvert\max(B_{4j})\rvert$	2 065 042	9 595.2	297.46	16.846	3.643	0.849	0.213	0.100 0	0.089 5

从表1可以看出,随着采样点数的增多,B阵中的系数逐渐减小。当$N \leq 28$时,B阵中的最大值对测量误差具有明显的放大作用;当$N \geq 30$时,则B阵中的最大值对测量误差已没有放大作用。这说明随着N值的增大,B阵对测量误差造成的影响将减小。值得注意的是,由于是用直线拟合衰减直流分量,所以数据窗越长,这种拟合的误差就越大,特别是在衰减时间常数τ很小的时候。

下面将B阵中的系数和全波傅氏算法的系数进行比较。众所周知,全波傅氏算法基波分量的实部X_R和虚部X_I分别为:

$$X_R = \frac{2}{N}\left[\sum_{k=1}^{N} x(k) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

$$X_I = \frac{2}{N}\left[\sum_{k=1}^{N} x(k) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

X_R和X_I中的系数最大值均为$2/N$,当$N = 32$时,则最大值为0.062 5,这仅为表1中N取34时的1/3左右(对实部而言)。计算表明,当N取38时,B阵中第3、4行的最大值分别为0.075和0.07。但数据窗加长,直线拟合的误差也就越大。因此,要使预设模型中包含衰减直流分量的最小二乘法既能消除衰减直流分量,又有一定的精度,则必须根据预设的模型选择合理的数据窗N。

当每周波采样64点即$T_S = 0.312\,5$ ms时,同理可以计算不同N值下所得到的B阵的第3行和第4行的最大绝对值,如表2所示。

表2　$T_S = 0.312\,5$ ms时B阵中第3、4行在不同N下的最大绝对值

Tab. 2　Maximal absolute value in row 3 and 4 of matrix B when $T_S = 0.312\,5$ ms

N	16	24	32	38	44	52	56	60	64
$\lvert\max(B_{3j})\rvert$	2.3×10^7	36 786	303.4	106.8	20.75	3.514 2	1.421	0.569 2	0.229 6
$\lvert\max(B_{4j})\rvert$	2.4×10^7	100 010	2 797	263.2	26.43	2.343 7	0.646 6	0.150 8	0.042 4

从表 2可以看出,当数据窗 $N\geq64$时,最小二乘解才有较高的精度,而相同采样频率下的全波傅氏算法的系数最大值仅为 0.031 25。由此可以看出,提高采样频率也不能缩短数据窗所占用的时间。

2.1.2 由 A^TA的条件数分析

在式 (4)中,由于 A是常系数矩阵,因此,采样值矩阵 I的误差将直接影响到最小二乘解 $\bar{X}$的误差。由数值分析理论可知,A^TA的条件数 $\mathrm{cond}(A^TA)$可以反应式 (4)的'病态'程度,即该条件数越大,则采样值同样的微小变化就会使 $\bar{X}$有很大变化,'病态'越严重[4]。这可以从下面关于 $\bar{X}$的相对误差公式得出:

$$\frac{\|\Delta\bar{X}\|}{\|\bar{X}\|}\leq\mathrm{cond}(A^TA)\frac{\|A^T\Delta I\|}{\|A^TI\|}\qquad(8)$$

由式 (8)可以知道,当采样值矩阵 I和误差 ΔI一定时,条件数决定了最小二乘解 $\bar{X}$的相对误差上限。也就是说,条件数越大,$\bar{X}$可能产生的相对误差越大。由理论分析可知,条件数的最小值为 1。

每周波采样分别为 32点和 64点时,计算不同 N值下的条件数 $\mathrm{cond}(A^TA)$,列于表 3和表 4中。

表 3 $T_S=0.625$ ms时不同 N值下的条件数

Tab. 3 Conditional numbers at variable N when $T_S=0.625$ ms

N	14	20	24	28	32	36	38
cond( )	2.4×10^{16}	5.6×10^{11}	2.4×10^{9}	2.0×10^{7}	3.0×10^{5}	4.5×10^{4}	3.4×10^{4}

表 4 $T_S=0.312\,5$ ms时不同 N值下的条件数

Tab. 3 Conditional number at variable N when $T_S=0.312\,5$ ms

N	16	32	44	52	60	64	68
cond( )	1.9×10^{18}	8.1×10^{13}	1.7×10^{10}	1.4×10^{8}	1.9×10^{6}	2.8×10^{5}	7.8×10^{4}

从表 3和表 4中可以看出,随着 N的增大,条件数迅速减小。但同时也可以看出,即使采样一个周波,条件数仍然相对较大。由于条件数反映的是产生最大相对误差的可能性,因此条件数只具有参考意义。

由以上的分析可以得出:预设模型中包含衰减直流分量和 6次以下整数次谐波的最小二乘算法的数据窗为一个周波左右,精度也不是很高。容易验证,减少预设模型中的分量,相应的 B阵中系数的最大绝对值和条件数都会减小。但是预设模型越简单,得到的频率特性就越差。

2.2 预设模型中不包含衰减直流分量

文献 [5]提出了在预设模型中不包含衰减直流分量,通过增加两个采样点的计算来除去衰减直流分量的最小二乘算法,其思路与能滤除衰减直流分量的全波傅氏算法一致[7]。

在这种算法中,首先要计算 3次不包含衰减直流分量的最小二乘算法,然后用这 3次的结果来计算衰减直流分量。所以,如果这 3次计算的结果有较大的误差,必然影响衰减直流分量的滤除。下面就不包含衰减直流分量的最小二乘算法进行分析。

由于不考虑衰减直流分量,因此 A阵就变为:

$$A=\begin{bmatrix}\sin100\pi t_1 & \cos100\pi t_1 & \cdots & \sin500\pi t_1 & \cos500\pi t_1\\ \sin100\pi t_2 & \cos100\pi t_2 & \cdots & \sin500\pi t_2 & \cos500\pi t_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin100\pi t_N & \cos100\pi t_N & \cdots & \sin500\pi t_N & \cos500\pi t_N\end{bmatrix}$$

设每周波采样 32点,采样周期 $T_S=0.625$ ms,A阵中 t_i取 T_S,于是可得到基波在 B阵中对应的第 1行 (实部)和第 2行 (虚部)在不同 N值下的最大绝对值以及相应的条件数,列在表 5中。

由于预设模型中没有衰减直流分量,表 5的数据明显比表 3和表 1的数据小。表 5最明显的一个特点是当 N取 32时,B阵中的系数和条件数同时取得最小值。经过计算对比,这时 B阵中的系数与全波傅氏算法的系数完全一致。由表 5可知,数据窗 $N\geq26$时,该算法才有较高的精度。应该说明的是,当数据窗 N小于一个周波时,未包含在预设模型中的高频整数次谐波也会产生误差,而全波傅氏算法则可以完全滤除高频整数次谐波,对高频非整数次谐波也有较大的抑制作用[2]。

表 5 $T_S=0.625$ ms时 B阵中第 1、2行在不同 N下的最大绝对值和条件数

Tab. 5 Maximal absolute value in row 1 and 2 of matrix B and the conditional numbers when $T_S=0.625$ ms

N	12	16	20	24	26	28	30	32	34
$\lvert\max(B_{1j})\rvert$	327.8	3.963	0.732	0.179	0.101	0.079 1	0.063 4	0.062 5	0.062 8
$\lvert\max(B_{2j})\rvert$	1 029	24.44	1.32	0.152	0.119	0.118	0.111	0.062 5	0.063 3
cond( )	3.3×10^{8}	2.5×10^{5}	1.4×10^{3}	22	5.75	4.94	2.29	1.00	1.56

3　仿真计算

3.1　预设模型中包含衰减直流分量

仿真模型如下:

模型 1:

$$i(t) = 50\exp(-25t) + 50\sin(100\pi t + \pi/6) + 20\sin(200\pi t) + 10\sin(300\pi t) + 10\sin(400\pi t) + 5\sin(500\pi t)$$

模型 2:

$$i(t) = 50\exp(-25t) + 50\sin(100\pi t + \pi/6) + 20\sin(200\pi t) + 10\sin(300\pi t) + 10\sin(400\pi t) + 5\sin(500\pi t) + \sin(1050\pi t + \pi/6)$$

模型 2的最后一项为假想的误差,是一个高频非整数次谐波,这样的误差假设虽然具有偶然性,但不影响定性分析。设 $t=0$时故障,每周波采样 64点,仅把基波的实部 I_{R1}和虚部 I_{I1}计算结果列在表 6中。I_{R1}和 I_{I1}的理论值分别为 43.30和 25。

表 6　仿真计算结果 1

Tab.6　Simulation results No.1

	N	16	24	32	44	52	56	60	64	72
I_{R1}	模型 1	42.96	42.85	42.81	42.89	43.02	43.10	43.19	43.29	43.49
	模型 2	-2.5×10^6	1.4×10^5	185.7	18.30	30.98	43.00	41.76	43.11	43.40
I_{I1}	模型 1	24.63	24.80	24.96	25.26	25.40	25.45	25.48	25.49	25.49
	模型 2	2.8×10^6	-3.2×10^5	-2 001	13.55	18.68	25.80	25.24	25.53	25.51

仿真结果表明:①随着数据窗的加长,精度逐步提高,但数据窗过长,则直线拟合衰减直流分量的误差变大。②当使用无误差的模型 1时,只需要很短的数据窗就可到精度较高的结果;但对于带误差的模型 2,则要将近一个周波才能得到精度相对较高的结果。③文献 [5]中的仿真仅基于无误差模型,其得出的 24点数据窗结论不能满足实际的需要。

3.2　预设模型中不包含衰减直流分量

仿真模型如下:

模型 3:

$$i(t) = 50\sin(100\pi t + \pi/6) + 20\sin(200\pi t) + 10\sin(300\pi t) + 10\sin(400\pi t) + 5\sin(500\pi t)$$

模型 4:

$$i(t) = 50\sin(100\pi t + \pi/6) + 20\sin(200\pi t) + 10\sin(300\pi t) + 10\sin(400\pi t) + 5\sin(500\pi t) + \sin(1050\pi t + \pi/6)$$

设 $t=0$时故障,每周波采样 32点,仅把基波的实部 I_{R1}和虚部 I_{I1}计算结果列在表 7中。I_{R1}和 I_{I1}的理论值分别为 43.30和 25。

表 7　仿真计算结果 2

Tab.7　Simulation results No.2

	N	12	16	20	24	26	28	30	32	36
I_{R1}	模型 3	43.30	43.30	43.30	43.30	43.30	43.30	43.30	43.30	43.30
	模型 4	503.5	51.42	45.27	43.42	43.33	43.24	43.31	43.30	43.28
I_{I1}	模型 3	25.00	25.00	24.99	25.00	24.99	25.00	24.99	24.99	24.99
	模型 4	-848.0	66.88	28.80	25.13	25.01	25.13	24.95	25.00	24.98

仿真结果表明:①当使用无误差的模型 3时,只需要很短的数据窗就可得到精度很高的结果;但对于带误差的模型 4,则要较长的数据窗才能得到精度相对较高的结果,这和前面的分析一致;②文献 [6]中的仿真也是基于无误差模型,其得到的短数据窗结论并不能应用于实际中。针对本文的仿真,文献 [6]认为数据窗取 12点就足够精确,但从表 7可以看出,加入误差后,12点的数据窗是明显不够。

4　结束语

通过理论分析和仿真计算,本文得出如下结论:将最小二乘算法的系数矩阵和条件数进行综合分析,对实现最小二乘算法具有很大的指导意义。最小二乘算法可根据不同精度的要求而改变数据窗的长度,但缩短数据窗的同时则必然引起精度的下降,实际应用中应根据上面的分析,结合预设的模型综合考虑。

参考文献:

[1]　陈德树. 计算机继电保护原理与技术 [M]. 北京:水利电力出版社, 1992.
CHEN De-shu. Principle and Technology of Computer Relay Protection[M]. Beijing: Hydraulic and Electric Power Press, 1992.

[2]　陈德树,张哲,尹项根. 微机继电保护 [M]. 北京:中国电力出版社, 2000.

(下转第 15页　continued on page 15)

jing: China Electric Power Press, 1997.

[4] 钱振华. 电气设备倒闸操作技术问答(第一版)[M]. 北京:水利电力出版社, 1992.

QIAN Zhen-hua. Floodgate Operating Technology Question and Answer of the Electric Equipment, First Edition[M]. Beijing: China Electric Power Press, 1992.

收稿日期: 2005-06-07;　修回日期: 2005-08-14

作者简介:

田国林(1966-),男,高级工程师,主要从事电力调度运行管理工作; E-mail: tiangl@dtxfdl.com.cn

刘　宏(1970-),男,工程师,从事电力生产管理。

Application of transformer gap protection in the power system with grounded neutral

TIAN Guo-lin[1], LIU Hong[2]

(1. Xiangfan Power Supply Company Dispatch and Communication Center, Xiangfan 441002, China;

2. Xiangyang Power Supply Company, Xiangyang 441100, China)

Abstract: This paper analyses the non-complete phase operation caused by the conditions of fault grounding, breakdown and asychronous switch-in after direct grounded neutral system breaks away from the main nets. It is dangerous of neutral voltage displacement of transformer when non-complete phase operation. Main transformer's gap protection is proposed to be employed in power system with direct grounded neutral.

Key words: isolated operation; non-complete phase operation; gap protection

(上接第9页　continued from page 9)

CHEN De-shu, ZHANG Zhe, YIN Xiang-gen. Microcomputer-based Relay Protection[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2000.

[3] 丁书文,黄训诚,胡起宙. 变电站综合自动化原理及应用[M]. 北京:中国电力出版社, 2002.

DING Shu-wen, HUANG Xun-cheng, HU Qi-zhou. Principle and Application of Electric Substation Automation[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2002.

[4] 杨大地,涂光瑜. 数值分析[M]. 重庆:重庆大学出版社, 1998.

YANG Da-di, TU Guang-yu. Numerical Analysis[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1998.

[5] 王毅非. 最小二乘算法的研究与改进[J]. 继电器, 2000, 28(3): 5-8.

WANG Yi-fei. Study and Improvement of Least Squares Algorithm[J]. Relay, 2000, 28(3): 5-8.

[6] 周大敏,龙燕. 一种不受衰减非周期分量影响的最小二乘滤波算法[J]. 电网技术, 1999, 23(3): 31-33.

ZHOU Da-min, LONG Yan. An Efficient Method to Eliminate the Effects of Decaying DC Component on the Least Square Algorithm[J]. Power System Technology, 1999, 23(3): 31-33.

[7] 苏文辉,李钢. 一种能滤去衰减直流分量的改进全波傅氏算法[J]. 电力系统自动化, 2002, 26(23): 42-44.

SU Wen-hui, LI Gang. An Improved Full-wave Fourier Algorithm for Filtering Decaying DC Component[J]. Automation of Electric Power Systems, 2002, 26(23): 42-44.

收稿日期: 2005-06-17

作者简介:

刘和平(1957-),男,教授,长期从事单片机、数字信号处理器、微机在电力系统中的应用等研究工作;

徐育军(1970-),男,硕士研究生,电气工程师,主要从事电力系统微机保护的研究工作; E-mail: xuyujun18@mail.china.com

张学涛(1972-),男,电气工程师,长期从事电力通讯及水电站厂内经济运行等高级应用研究。

Analysis of measurement error of least squares algorithm

LIU He-ping[1], XU Yu-jun[1], ZHANG Xue-tao[2]

(1. Institute of Electric Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. XJ Electric Co., Ltd, Xuchang 461000, China)

Abstract: Least squares algorithm is carried out in microcomputer-based protection to calculate the current value of fundamental wave and harmonics. This paper analyses the impact of the coefficient matrix in the algorithm on the measurement error and compares the result with the impact of the coefficient in full-wave Fourier algorithm. The difficulties of realizing short data window least squares algorithm are discussed and conclusions are reached as well.

Key words: microcomputer-based protection; least squares algorithm; full-wave Fourier algorithm