一种精确滤除衰减非周期分量的新算法

唐建辉, 吴在军, 胡敏强
(东南大学电气工程系,江苏 南京 210096)

摘要: 提出了精确滤除衰减非周期分量的新算法。新算法对衰减的非周期分量时间常数 τ未作假定和要求,是从信号的离散采样值出发,严格推导得到精确结果。文中同时给出了基于该精确算法的简化算法,在 τ较小时,精度仍很高。因此,该简化算法具有较高的理论和实用价值,本算法已运用在课题组研制的 110 kV微机保护通用平台上。

关键词: 衰减非周期分量; 傅氏算法; 离散

中图分类号: TM711 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-4897(2005)11-0014-04

0 引言

在电力系统发生故障时,实际的故障暂态信号中除了含有基波分量外,还含有衰减的非周期分量和高频分量。全波傅氏算法可以滤除直流分量和基波整数倍谐波分量,但不能很好地解决滤除衰减的非周期分量的问题,因此使计算结果产生误差。对如何滤除衰减的非周期分量,许多学者进行了大量的研究,提出了一些算法,如文献[1,2]。这些算法在推导过程中均对连续的傅里叶积分用离散点的数值积分求和来代替,因此其算法必然是近似算法,不能完全精确地消除衰减直流分量的影响。本文从信号的离散采样值出发,推导出完全利用离散值进行精确滤除衰减直流分量的新算法。此算法在推导过程中未作任何近似。因此,其计算结果完全复原其原始信号,仿真结果也证明了这一点。

1 滤除衰减的非周期分量新算法

1.1 算法推导

在滤除衰减的非周期分量算法研究的大量文献中,均用离散点的数值积分求和来代替连续的傅里叶积分,理论证明,两者在绝大多数情况下不会精确相等。因此本文在推导过程中完全从离散采样值出发,不出现函数的连续积分,从而推导出精确解。

设含衰减的非周期分量的信号为

$$i(t) = Ae^{-\alpha t} + \sum_{n=1}^{M} I_{m(n)} \sin(nwt + \phi_n) = Ae^{-\alpha t} + \sum_{n=1}^{M} (I_{m(n)} \sin\phi_n \cos nwt + I_{m(n)} \cos\phi_n \sin nwt)$$

令:

$$I_{Re(n)} = I_{m(n)} \sin\phi_n$$
$$I_{Im(n)} = I_{m(n)} \cos\phi_n$$

则:

$$i(t) = Ae^{-\alpha t} + \sum_{n=1}^{M} (I_{Re(n)} \cos nwt + I_{Im(n)} \sin nwt)$$

对上述信号进行一个周波 N 等分采样,得各离散采样点数值表达式为

$$i(k) = Ae^{-\alpha \frac{T}{N} k} + \sum_{n=1}^{M} [I_{Re(n)} \cos(n\frac{2\pi}{N}k) + I_{Im(n)} \sin(n\frac{2\pi}{N}k)]$$

对上述采样离散系列进行离散傅里叶变换即 D. F. T(推导中利用三角函数的正交性),得:

$$\begin{aligned} I^{*}_{Re(n)} &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[i(k)\cos(n\frac{2\pi}{N}k)] = \\ &\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[Ae^{-\alpha\frac{T}{N}k}\cos(n\frac{2\pi}{N}k)] + \\ &\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[I_{Re(n)}\cos^2(n\frac{2\pi}{N}k)] = \\ &\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[Ae^{-\alpha\frac{T}{N}k}\cos(n\frac{2\pi}{N}k)] + I_{Re(n)} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} I^{*}_{Im(n)} &= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[i(k)\sin(n\frac{2\pi}{N}k)] = \\ &\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[Ae^{-\alpha\frac{T}{N}k}\sin(n\frac{2\pi}{N}k)] + \\ &\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[I_{Im(n)}\sin^2(n\frac{2\pi}{N}k)] = \\ &\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[Ae^{-\alpha\frac{T}{N}k}\sin(n\frac{2\pi}{N}k)] + I_{Im(n)} \end{aligned} \tag{2}$$

令:

$$\Delta I_{Re(n)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[Ae^{-\alpha\frac{T}{N}k}\cos(n\frac{2\pi}{N}k)] \tag{3}$$

$$\Delta I_{\mathrm{Im}(n)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[A\mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}k}\sin\left(n\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \tag{4}$$

则

$$I_{\mathrm{Re}(n)} = I^{*}_{\mathrm{Re}(n)} - \Delta I_{\mathrm{Re}(n)} \tag{5}$$

$$I_{\mathrm{Im}(n)} = I^{*}_{\mathrm{Im}(n)} - \Delta I_{\mathrm{Im}(n)} \tag{6}$$

可以看出,若能求出 A、α,则可通过式(3)、(4)、(5)、(6)精确求出 $I_{\mathrm{Re}(n)}$、$I_{\mathrm{Im}(n)}$。

下面推导 A、α 的求法。

$$\sum_{k=0}^{N-1} i(k) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(A\mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}k}\right) + \sum_{n=1}^{M}\left[I_{\mathrm{Re}(n)}\sum_{n=1}^{N-1}\cos\left(n\cdot\frac{2\pi}{N}k\right) + I_{\mathrm{Im}(n)}\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(n\frac{2\pi}{N}k\right)\right] = \sum_{k=0}^{N-1}\left(A\mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}k}\right) = A\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}}} \tag{7}$$

$$i(0) - i(N) = A\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\right) \tag{8}$$

令

$$\sum_{k=0}^{N-1} i(k) = B \tag{9}$$

$$i(0) - i(N) = C \tag{10}$$

则

$$B = A\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}}} \tag{11}$$

$$C = A\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T}\right) \tag{12}$$

所以:

$$\alpha = \frac{N}{T}\ln\left(\frac{B}{B-C}\right) \tag{13}$$

$$A = \frac{C}{1-\left(\frac{B-C}{B}\right)^{N}} \tag{14}$$

1.2　算法简化

因为式(13)中含有自然为底的对数运算,在实际运用中不便实现,故简化之。

式(12)/(11)得:

$$\frac{C}{B} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}}$$

一般情况下,$T = 0.02$。如果衰减非周期分量的时间常数为 0.02 s,则 $\alpha = 50$,取 $N = 12$,$(\alpha T/N) = 1/12$。可见,在非周期分量衰减时间常数不是特别小的情况下,对 $\mathrm{e}^{(-\alpha T/N)}$ 用泰勒级数展开,取前两项即可满足精度要求。

$$\mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}} = 1 - \alpha\frac{T}{N} + \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{T}{N}\right)^2 = D \tag{15}$$

$$\frac{C}{B} = \alpha\frac{T}{N} - \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{T}{N}\right)^2 \tag{16}$$

解之:

$$\alpha = \frac{2N\frac{C}{B}}{T\left(1+\sqrt{1-2\frac{C}{B}}\right)} \tag{17}$$

$$A = \frac{C}{1-\left(\frac{B-C}{B}\right)^{N}} \tag{18}$$

实际计算中不必计算出 α,而是求出 $\alpha\frac{T}{N}$,由式(17)可得

$$\alpha\frac{T}{N} = \frac{2\frac{C}{B}}{\left(1+\sqrt{1-2\frac{C}{B}}\right)}$$

于是,由式(15)求出

$$D = \mathrm{e}^{-\alpha\frac{T}{N}} = 1 - \left(\alpha\frac{T}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{T}{N}\right)^2$$

将式(3)、(4)改写为:

$$\Delta I_{\mathrm{Re}(n)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[AD^{k}\cos\left(n\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \tag{19}$$

$$\Delta I_{\mathrm{Im}(n)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[AD^{k}\sin\left(n\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \tag{20}$$

将式(1)、(2)、(19)、(20)代入式(5)、(6)得:

$$I_{\mathrm{Re}(n)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(i(k) - AD^{k}\right)\cos\left(n\frac{2\pi}{N}k\right)\right]$$

$$I_{\mathrm{Im}(n)} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(i(k) - AD^{k}\right)\sin\left(n\frac{2\pi}{N}k\right)\right]$$

可见,由前面求出 A、D 后,将原采样序列进行修正,再进行一次全波傅氏变换就能得到 $I_{\mathrm{Re}(n)}$、$I_{\mathrm{Im}(n)}$。

进而求出交流有效值 $I_{m(n)}$ 及初相角 ϕ_n。

$$I_{m(n)} = \sqrt{I_{\mathrm{Re}(n)}^{2} + I_{\mathrm{Im}(n)}^{2}} \tag{21}$$

$$\phi_n = \arcsin\frac{I_{\mathrm{Re}(n)}}{I_{m(n)}} \tag{22}$$

2　算法仿真

为了验证本算法对衰减的非周期分量的有效滤除能力,举例比较全波傅氏算法、文[1]算法、本文算法对下述信号进行谐波提取的结果。仿真时,改变衰减时间常数 $\tau(\alpha = 1/\tau)$ 及一个周期的采样点数 N,仿真结果如表 1、表 2所示。

$$i(t) = 20\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + 20\sin(wt+30^{\circ}) + 4\sin(2wt) + 6\sin(3wt) + 8\sin(4wt) + 5\sin(5wt)$$

表 1 仿真结果对比 $(N=12)$

Tab. 1 Comparison of the simulation results$(N=12)$

τ/s	算法	基波 幅值	基波 相角	二次谐波 幅值	二次谐波 相角	三次谐波 幅值	三次谐波 相角	四次谐波 幅值	四次谐波 相角	五次谐波 幅值	五次谐波 相角
0.005	全周傅氏	26.069 3	33.950 3	7.058 4	21.920 8	7.852 8	15.981 5	9.130 8	12.607 9	5.757 1	19.534 8
	文[1]算法	20.606 0	35.420 8	4.078 9	26.925 3	5.816 7	18.005 9	7.589 4	13.606 4	4.557 1	23.145 9
	本文算法	20.041 2	29.826 2	4.013 6	0.302 0	6.004 4	0.118 6	8.001 8	0.062 5	5.000 8	0.082 9
0.01	全周傅氏	25.756 5	30.500 0	6.706 3	16.552 1	7.608 8	12.748 1	8.968 3	10.279 5	5.607 4	16.252 4
	文[1]算法	20.675 5	34.083 1	4.030 0	22.090 9	5.801 5	14.998 5	7.605 1	11.376 0	4.542 8	19.347 5
	本文算法	20.001 0	29.975 1	4.000 9	0.027 9	6.000 3	0.000 0	8.000 2	0.000 0	5.000 1	0.000 0
0.02	全周傅氏	24.169 6	28.932 7	5.940 4	11.930 6	7.141 6	9.193 9	8.678 3	7.361 2	5.395 2	11.769 0
	文[1]算法	20.484 1	32.786 7	3.960 7	15.753 9	5.811 9	10.638 6	7.677 8	8.037 9	4.605 2	13.510 5
	本文算法	20.000 2	29.997 2	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 1	0.000 0	5.000 1	0.000 0
0.04	全周傅氏	22.540 0	28.798 8	5.182 7	7.877 4	6.690 1	5.859 9	8.405 4	4.598 7	5.218 9	7.379 6
	文[1]算法	20.291 1	31.706 2	3.939 4	9.668 2	5.858 3	6.482 1	7.780 7	4.878 8	4.721 6	8.066 2
	本文算法	20.000 3	29.999 0	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 1	0.000 0	5.000 1	0.000 0
0.06	全周傅氏	21.811 0	28.987 3	4.843 3	5.909 4	6.490 4	4.290 1	8.286 6	3.328 5	5.148 9	5.342 2
	文[1]算法	20.206 9	31.226 8	3.944 8	6.916 9	5.890 2	4.625 9	7.836 1	3.476 9	4.789 4	5.699 1
	本文算法	20.000 3	29.999 1	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 1	0.000 0	5.000 1	0.000 0
0.08	全周傅氏	21.404 8	29.148 4	4.654 1	4.732 8	6.379 6	3.381 6	8.221 2	2.605 5	5.112 3	4.180 6
	文[1]算法	20.160 3	30.957 1	3.952 0	5.374 4	5.910 9	3.590 3	7.869 6	2.696 7	4.831 4	4.397 8
	本文算法	20.000 3	29.999 1	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 1	0.000 0	5.000 1	0.000 0

表 2 仿真结果对比 $(N=24)$

Tab. 1 Comparison of the simulation results$(N=24)$

τ/s	算法	基波 幅值	基波 相角	二次谐波 幅值	二次谐波 相角	三次谐波 幅值	三次谐波 相角	四次谐波 幅值	四次谐波 相角	五次谐波 幅值	五次谐波 相角
0.005	全周傅氏	25.674 9	32.174 4	6.986 9	14.456 4	7.986 1	9.110 4	9.441 0	6.596 7	6.128 5	9.385 8
	文[1]算法	20.287 4	32.649 8	3.991 3	13.041 5	5.943 3	8.440 2	7.896 1	6.255 5	4.888 8	10.070 5
	本文算法	20.008 8	29.964 6	4.002 9	0.055 9	6.001 0	0.022 8	8.000 4	0.000 0	5.000 2	0.000 0
0.01	全周傅氏	25.466 4	28.935 8	6.721 6	9.919 6	7.774 1	6.821 5	9.277 4	5.194 4	5.988 4	7.689 3
	文[1]算法	20.345 6	32.007 9	4.002 1	10.761 3	5.949 2	7.131 1	7.905 5	5.338 2	4.893 2	8.630 4
	本文算法	20.000 5	29.994 2	4.000 3	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 1	0.000 0	5.000 0	0.000 0
0.02	全周傅氏	23.975 3	27.727 5	5.993 0	6.607 5	7.292 7	4.731 2	8.929 0	3.664 0	5.712 8	5.588 8
	文[1]算法	20.254 0	31.367 1	3.989 3	7.688 9	5.954 0	5.126 4	7.924 1	3.845 7	4.910 5	6.211 3
	本文算法	20.000 3	29.998 9	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 0	0.000 0	5.000 0	0.000 0
0.04	全周傅氏	22.420 3	28.003 7	5.235 4	4.149 6	6.800 0	2.960 7	8.574 4	2.283 0	5.437 6	3.554 6
	文[1]算法	20.155 3	30.835 1	3.985 0	4.744 5	5.965 8	3.164 5	7.948 5	2.374 0	4.937 3	3.823 5
	本文算法	20.000 3	29.999 2	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 0	0.000 0	5.000 0	0.000 0
0.06	全周傅氏	21.724 0	28.398 9	4.887 8	3.057 9	6.574 7	2.157 0	8.412 5	1.654 0	5.313 2	2.596 3
	文[1]算法	20.111 1	30.599 8	3.986 5	3.408 3	5.973 5	2.272 9	7.961 5	1.705 0	4.952 6	2.741 4
	本文算法	20.000 3	29.999 1	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 0	0.000 0	5.000 0	0.000 0
0.08	全周傅氏	21.336 5	28.682 2	4.691 8	2.427 3	6.447 7	1.696 9	8.321 3	1.296 0	5.243 4	2.043 3
	文[1]算法	20.086 5	30.467 6	3.988 3	2.655 7	5.978 5	1.770 8	7.969 4	1.328 2	4.962 0	2.133 5
	本文算法	20.000 3	29.999 1	4.000 2	0.000 0	6.000 1	0.000 0	8.000 0	0.000 0	5.000 0	0.000 0

从仿真结果来看,当 τ和 N 较小时,全周傅氏和文[1]算法在幅值和相位上均有较大误差,全周傅氏算法的误差来自于该算法对衰减的非周期分量的无滤除能力,而文[1]算法的误差来自于该算法在推导过程中对连续的傅里叶积分用离散点的数值积分求和来代替,因此,这两种算法本身均存在固有误差。而基于本文精确算法的简化算法,在 τ和 N 较小时,精度仍很高,其误差来自于 $e^{(-\alpha T/N)}$ 用泰勒级数展开的前两项代替。显然可见 N 值越大,误差越小,其精度越高,仿真结果也证明了这一点。

3 结论

本算法中数据窗为 $N+1$,影响该算法速度的主要是 DFT,近几年来,随着特别适合数据处理的 DSP芯片的出现及其在周期信号分析的应用,DFT 运算速度越来越快。本算法已运用在课题组研制的

110 kV微机保护通用平台上(主CPU为TI公司的TMSVC5410A - 160),每周期48点采样,滤除非周分量模块的执行时间为4 μs,而包含滤除非周分量的谐波计算模块(一、二、三、五次谐波)共耗时10 μs,完全可以满足系统实时性的要求。

参考文献:

[1] 李孟秋,王耀南,王辉. 基于全周波富氏算法滤除衰减直流分量新方法[J]. 湖南大学学报, 2001, 28(1): 59 - 63.
LI Meng-qiu, WANG Yao-nan, WANG Hui. A New Algorithm for Filtering Decaying DC Component Based on Holocycle Fourier Algorithm[J]. Journal of Hunan University, 2001, 28(1): 59-63.

[2] 熊岗,陈陈. 一种能滤除直流分量的交流采样新算法[J]. 电力系统自动化, 1997, 21(2): 24-26.
XIONG Gang, CHEN Chen. A Novel Alternating Current Sampling Algorithm for Filtering Decaying Direct Current Component[J]. Automation of Electric Power Systems, 1997, 21(2): 24-26.

[3] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.
HU Guang-shu. Digital Signal Process——Theory, Algorithm and Its Realization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.

收稿日期: 2004-09-20;　修回日期: 2004-11-30

作者简介:

唐建辉(1967 -),男,硕士研究生,高级工程师,主要从事110 kV微机保护通用平台的研究; E-mail: nt tjh@pub. nt jsinfo. net

吴在军(1975 -),男,博士,主要从事变电站自动化系统的研究;

胡敏强(1961 -),男,教授,博士生导师,主要从事工程电磁场计算、电机及其控制技术、电气主设备状态监测与故障诊断等方面的研究工作。

A new algorithm for filtering decaying DC components accurately

TANG Jian-hui, WU Zai-jun, HU Min-qiang

(School of Electrical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: To filter decaying DC component accurately, a new algorithm is presented which needn't the decaying constant τ to be known in advance. The accurate results are deduced out based on the signal's discrete samples. According to the accurate algorithm, the paper also proposes the simple one. The novel algorithm also has higher computation precision when τ is smaller. This proposed algorithm is proved to be valuable and has been used in 110 kV relay protection platform.

Key words: decaying DC component; Fourier algorithm; discrete