第33卷 第5期
2005年3月1日
继 电 器
RELAY
Vol 33 No. 5
Mar 1, 2005

DFT递推算法及其应用

高 潮, 郁惟镛
(上海交通大学电气工程系, 上海 200240)

摘要: 谐波分析是信号处理的重要内容, 在生产、研究中应用极其广泛。离散傅里叶变换(DFT)是利用采样数据计算信号的频谱的一种数学工具, 其计算量较大, 难以用于在线实时频谱分析。该文系统介绍了DFT的递推算法, 较好地解决了这一问题。

关键词: 傅里叶变换; DFT; 算法; 递推

中图分类号: TM744 **文献标识码**: A **文章编号**: 1003-4897(2005)05-0001-03

0 引言

1965年Cooley和Tukey提出FFT, 其本质上是一种计算技巧。FFT及其各种改进算法大大提高了DFT的运算时间。FFT是对一组孤立数据的快速算法, 而很多应用场合要求对信号连续不间断地采样, 并实时计算其谐波分量, 对此可以使用计算量更小的递推算法。

1 递推算法

设符号"$((n))_N$"表示n对N求余, 即如果$n = pN + r$, $0 \le r \le N-1$, n、N、p、r均为整数, 则$((n))_N = r$。

矩形序列定义为:

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & n\text{等于其他} \end{cases}$$

设$x(n)$是一个长度为N的有限长序列, 则$x(n)$的N点离散傅里叶变换(DFT)定义为:

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

其中: $W_N = \exp(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N})$。

DFT的循环移位(圆周移位)定理: 设$x(n)$是长度为N的有限长序列, $y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$, 则$Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)] = W_N^{-km} X(k)$, 其中$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)]$, $0 \le k \le N-1$。

证明:

$$Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn}$$

令$n+m = t$, 则有

$$Y(k) = \sum_{t=m}^{N-1+m} x((t))_N W_N^{k(t-m)} = W_N^{-km} \sum_{t=m}^{N-1+m} x((t))_N W_N^{kt}$$

上式中$x((t))_N W_N^{kt}$以N为周期, 所以在任何一个周期上求和结果相同。取t为$0, 1, \cdots, N-1$, 则

$$Y(k) = W_N^{-km} \sum_{t=0}^{N-1} x((t))_N W_N^{kt} = W_N^{-km} \sum_{t=0}^{N-1} x(t) W_N^{kt} = W_N^{-km} X(k)$$

证毕。

设对某一模拟周期信号每周波采样N次, 采样间隔为ΔT, $n\Delta T$时刻采样值为$x(n\Delta T)$, 简记为$x(n)$, 即采样序列为$\{x(0), x(1), x(2), \cdots\cdots\}$。设有限长序列$x_m(n) = \{x(m-N+1), \cdots, x(m)\}$的DFT为$X_m(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(m-N+1+n) W_N^{kn}$则根据循环移位定理有限长序列$x1_m(n) = x_m((n-((m))_N - 1))_N R_N(n)$的DFT为

$$X1_m(k) = W_N^{k[((m))_N + 1]} X_m(k) \tag{1}$$

这就是联系下面$X_m(k)$和$X1_m(k)$两种递推算法的关系式。

通常我们计算$X_m(k)$, 从上式可见$X1_m(k)$的模与$X_m(k)$的模相同。有限长序列$x1_{m-1}(n)$的DFT为$X1_{m-1}(k)$。而实际上序列$x1_m(n)$只是把序列$x1_{m-1}(n)$中的$x(m-N)$换成了$x(m)$, 其他元素不动。所以得递推公式

$$X1_m(k) = X1_{m-1}(k) + [x(m) - x(m-N)] W_N^{k((m))_N} \tag{2}$$

另外, 由DFT的定义容易知道有以下递推公式

$$X_m(k) = X_{m-1}(k) W_N^{-k} + [x(m) - x(m-N)] \cdot W_N^{k(N-1)} = [X_{m-1}(k) + x(m) - x(m-N)] \cdot W_N^{-k} \tag{3}$$

当采样数据是实数时,递推公式(2)计算量是3次实数加法和2次实数乘法,递推公式(3)计算量是4次实数加法和4次实数乘法。公式(2)稍好一些。另外$X1_m(k)$的相角是稳定不变的,它取决于最初采样时刻的相角,而$X_m(k)$的相角是随着m的改变以$\frac{2\pi k}{N}$为步长不断跳变的。公式(1)正是反映了这种关系。但是计算$X1_m(k)$时,每次乘的系数$W_N^{k((m))_N}$是不同的,这比$X_m(k)$稍麻烦一些。综合考虑,实际计算中用$X1_m(k)$更好一点。

如果实时性允许,也可以每采样2、3、……个点后进行一次递推计算,这样其他任务可以获得更多的执行时间。这种情况仍然是$X1_m(k)$计算量更小一点。

2 仿真研究

2.1 在测控系统中的应用

电能质量监测、RTU等测控系统主要测量稳态电气量,递推算法完全适合于这些场合。初始化时采样值和傅里叶系数均置为0,递推算法可自启动。

例如,有信号$S(t)=1.0\sin(\omega t)+0.5\sin(3\omega t)+0.2\sin(5\omega t)$,$\omega=314$ rad/s采样频率1800 Hz,用递推公式(2)计算$X1_m(k)$,结果如下图。

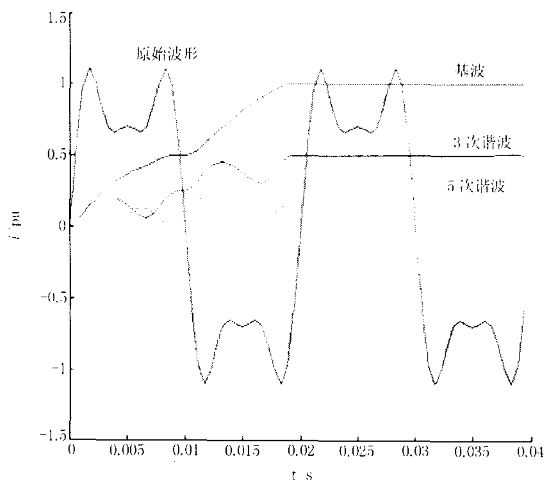

图1 稳态电流的仿真结果

Fig 1 Simulation results of steady-state currents

启动时基波大致呈单调上升形态,16.67 ms时计算出的基波已达到0.8985。3次和5次谐波启动时有较大波动。一周波后输出各次谐波的准确幅值。

2.2 在继电保护中的应用

通常,微机保护设置一个启动元件,保护启动的时刻可以当作是故障发生时刻。而使用递推算法时,可以不设置启动元件。这样就不知道准确的故障起始时刻,这对保护延时有影响。另一个问题是,故障确认要进行多少个采样点?

由于没有启动元件,故障发生时刻到递推算法发现故障之间的时间无法准确得知。假设递推算法在故障后一个周波时才发现故障,于是延时误差应在±10 ms之内。实际上仿真计算显示,故障电流稍大一些的情况下,常常不到半个周波就可发现故障。

关于故障确认要多少点的问题,较保守的做法是确认N(每周波采样点数)点。这种办法最坏情况可能要故障后2个周波才确认故障,这对于带延时的保护没什么问题,对速断保护则希望能更早确认故障。仿真计算显示,故障电流大于正常值较多的情况下,不到半个周波就可发现故障,这样再经过半个周波的确认,可做到一个周波内发出跳闸命令。

采用递推算法和启动元件相结合的方式也是一种方案。以递推算法为主,启动元件辅助递推算法对故障确认、故障发生时刻做出判断。但递推算法在启动元件没有启动时仍然可以出口,也即启动元件不再决定保护能否动作,而是辅助故障尽快确认和精确延时。

图2所示为一无限大功率电源供电系统在$t=0$时刻发生三相短路,$u_a=U_m\sin(\omega t+\alpha)$,$u_b=U_m\cdot\sin(\omega t+\alpha-\frac{2\pi}{3})$,$u_c=U_m\sin(\omega t+\alpha+\frac{2\pi}{3})$,$R=0.01$ pu(pu表示标么值),$R'=0.04$ pu,$L=0.1$ pu,$L'=0.4$ pu,无限大功率电源的频率为$\omega=1.0$ pu(即50 Hz),电源电压初相位$\alpha=0$ rad,电压幅值$U_m=1.0$ pu。

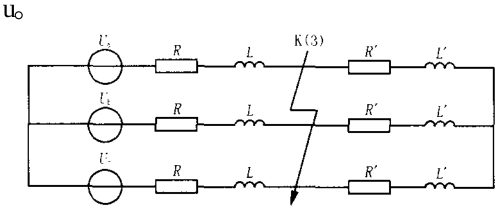

图2 三相短路系统图

Fig 2 Three-phase fault circuit

短路前电流为

$$\begin{cases} i_a=1.99007\sin(\omega t-1.47113) \\ i_b=1.99007\sin(\omega t-3.56553) \\ i_c=1.99007\sin(\omega t+0.62327) \end{cases}$$

令$t=0$,则得所需三相电流初始值。

短路电流为

$$\begin{cases} i_a = 9.950\ 37\sin(314.159t - 1.471\ 13) + 7.920\ 79e^{-31.415\ 9t} \\ i_b = 9.950\ 37\sin(314.159t - 3.565\ 53) - 3.274\ 43e^{-31.415\ 9t} \\ i_c = 9.950\ 37\sin(314.159t + 0.623\ 27) - 4.646\ 36e^{-31.415\ 9t} \end{cases}$$

式中 t的单位为 s,314.159t为时间 t的标幺值。

设速断定值为 1.990 074 ×1.25 = 2.487 59 pu (幅值,下面递推计算的也是幅值)。

用递推公式 (2)计算 $X1_m(k)$,每周波采样 12点,从 -0.04 s时刻开始自启动计算,0 s时刻发生三相短路。暂态电流最大的 A相仿真结果如图 3,图中 0.005 s时刻基波幅值为 2.587 0 pu已经大于速断定值。

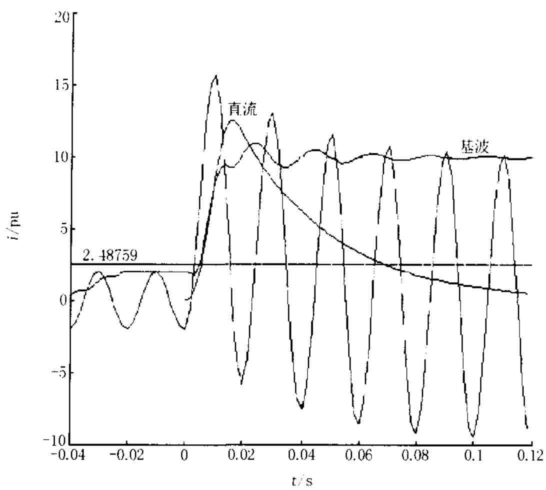

图 3 短路电流仿真结果

Fig 3 Simulation results of fault currents

3 结束语

递推公式 (2)有些文献曾提及到,但鲜有证明,能够见到的少数证明都是基于三角公式的繁琐推导,而且仅针对基波分量。

本文基于 DFT的循环移位 (圆周移位)定理,简洁、系统地阐述了 DFT的递推计算方法,并首次给出了两种递推算法的关系式。递推算法使 DFT的计算量大大缩小且与采样频率无关,便于实时计算,非常适合于连续采样的实时测控系统。电力系统微机继电保护通常采用电流突变量启动故障处理,故障发生以后才开始计算各电气量,使用本文中的递推算法即使在速度不高的中低档 CPU上也能做到在每个采样间隔实时连续计算,使得保护可能更快速、及时地处理故障。

参考文献:

[1] 王建赜,杨梅,纪延超,等. 一种递推式单次谐波快速傅里叶算法 [J]. 继电器, 2003, 31(5): 14-22.
WANG Jian-ze, YANG Mei, JI Yan-chao, et al. A Recursive Fast Fourier Transform of Single Harmonic Component[J]. Relay, 2003, 31(5): 14-22.

[2] 丁玉美,高西全,彭学愚. 数字信号处理 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1994.
DING Yu-mei, GAO Xi-quan, PENG Xue-yu. Digital Signal Processing[M]. Xi'an: Xidian University Press, 1994.

收稿日期: 2004-07-12; 修回日期: 2004-08-30

作者简介:

高 潮 (1974 -),男,硕士研究生,研究方向为电力系统继电保护。E-mail: ymif@sjtu.edu.cn

郁惟镛 (1940 -),男,教授,博士生导师,长期从事电力系统继电保护及综合自动化的研究及教学工作。

A recursive algorithm of DFT and its application

GAO Chao, YU Wei-yong

(Dept of Electrical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Harmonic analysis plays an important role in signal processing and is widely used in production and research. Discrete Fourier Transform (DFT) is a powerful mathematical tool to calculate signal frequency spectrum from sampled data, but it is not very suitable for the real-time processing circumstance because of its large amount of calculation. This paper presents the recursive algorithms of DFT systematically, and the calculation burden decreases dramatically. Its effectiveness has been verified by numerical simulation.

Key words: Fourier transform; DFT; algorithm; recursive