

正弦信号二次插值算法的误差分析

赵磊¹, 单渊达², 李蔚²

(1. 东南大学电气工程系, 江苏 南京 210096; 2. 上海市复旦微电子股份有限公司, 上海 200001)

摘要: 在电力系统的模拟信号采样和处理过程中, 为了降低频谱泄漏, 经常采用二次插值算法。该文从理论分析和数值仿真两个方面, 对二次插值算法在正弦信号分析中存在的误差进行了详细的研究, 得到了误差范围的解析表达式。该误差分析结果对于掌握正弦信号数字测量的精度和选择采样频率有着指导意义, 为测量数据的后续分析处理提供了理论基础。

关键词: 二次插值法; 误差分析; 电力系统测量

中图分类号: TM74 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-4897(2004)13-0011-04

0 引言

数字式电气测量是电力系统自动控制中的基本环节。目前, 相角量测单元(PMU)等自动装置一般采用固定时间间隔采样方式, 就是由微处理器(MCU)控制模数转换器(ADC)每隔一个固定的时间周期 T_s 对电气信号进行一次采样。采样频率通常为理论工频(50 Hz)的 N 倍。但是实际上电力系统的频率是不固定的, 会在 49.5 ~ 50.5 Hz 的范围内变化。所以这种采样方式不能保证采样次数 N 与采样周期 T_s 的乘积等于实际工频周期 T (即 $NT_s = T$)。这种情况被称为频谱泄漏, 会给电气参数的测量带来较大的误差。

为了解决这个问题, 文献[1]提出了一种二次插值法, 通过重新计算得出一组插值数据, 可以大大降低频率泄漏造成的误差, 但是对二次插值法本身带来的误差却未作详细的分析。本文深入地研究了二次插值算法的误差大小, 为信号处理的误差分析提供了理论基础。

1 二次插值算法简介

固定时间间隔采样的过程如下, 每间隔 T_s 的时间, ADC 进行一次采样。设其连续 3 次的采样分别在 t_{k-1} 、 t_k 、 t_{k+1} 时刻, 采样值分别为 D_{k-1} 、 D_k 、 D_{k+1} 。那么对于任意的 t_c 时刻, 其信号值 D_c 虽然没有直接采样得到, 但是可以根据实际采样值 D_{k-1} 、 D_k 、 D_{k+1} 由拉格朗日(Lagrange)二次插值法^[2]近似计算得到。其标准公式为

$$D_c = \frac{(t_c - t_k)(t_c - t_{k+1})D_{k-1}}{(t_{k-1} - t_k)(t_{k-1} - t_{k+1})} + \frac{(t_c - t_{k-1})(t_c - t_{k+1})D_k}{(t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1})} +$$

$$\frac{(t_c - t_{k-1})(t_c - t_k)D_{k+1}}{(t_{k+1} - t_{k-1})(t_{k+1} - t_k)} \quad (1)$$

一般使用的二次插值算法是内插法, 即 t_c 在区间 $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ 的范围内。二次插值法的本质效果就是在时间—采样值 ($t-D$) 平面上, 作出经过 (t_{k-1}, D_{k-1}) 、 (t_k, D_k) 、 (t_{k+1}, D_{k+1}) 3 点的抛物线, 此抛物线上对应 t_c 时刻的数值就是内插计算值。如图 1 所示。

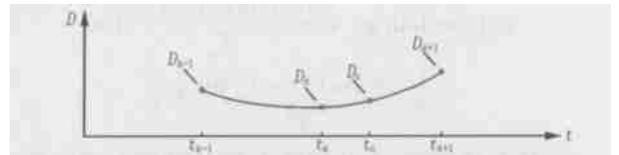


图 1 二次插值法

Fig. 1 Quadratic interpolation method

令采样时间周期为 T_s , 也就是 $t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k = T_s$ 。再令 $t_c - t_k = T_s \alpha$ 。这样式(1)可以写成

$$D_c = \frac{1}{T_s^2} \left[\frac{-T_s \alpha}{2} (T_s - T_s \alpha) D_{k-1} + (T_s + T_s \alpha) (T_s - T_s \alpha) \cdot D_k + \frac{T_s \alpha}{2} (T_s + T_s \alpha) D_{k+1} \right] \quad (2)$$

上式就是实用的二次插值公式。

2 理论误差分析

电力系统中, 电气量主要是正弦信号或可展开为傅里叶(Fourier)级数的信号, 因此我们只研究正弦信号下的二次插值算法误差。设信号表达式为

$$D(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (3)$$

其中: A 为幅值; ω 为角速度; ϕ_0 为初相角, 而 D 为信号值。为不失一般性, 可以令 $t_k = 0$, 则 $t_{k-1} = -T_s$, $t_{k+1} = T_s$ 。所以有

$$\begin{cases} D_{k-1} = A \sin(t_{k-1} + \theta) = A \sin(-T_s + \theta) \\ D_k = A \sin(t_k + \theta) = A \sin \theta \\ D_{k+1} = A \sin(t_{k+1} + \theta) = A \sin(T_s + \theta) \end{cases} \quad (4)$$

设二次插值函数为 $y(t) = at^2 + bt + c$ 。其中 a 、 b 、 c 分别为系数。显然在 $t-D$ 平面上, $y(t)$ 必然通过 3 个采样点 $(-T_s, D_{k-1})$, $(0, D_k)$ 和 (T_s, D_{k+1}) , 于是有下面的等式

$$\begin{cases} D_{k-1} = aT_s^2 - bT_s + c \\ D_k = c \\ D_{k+1} = aT_s^2 + bT_s + c \end{cases}$$

解上式得到 $a = (D_{k-1} + D_{k+1} - 2D_k) / (2T_s^2)$, $b = (D_{k+1} - D_{k-1}) / (2T_s)$, $c = D_k$ 。其中 D_{k-1} 、 D_k 、 D_{k+1} 都已在式(4)中给出, 这样就得到了插值函数 $y(t)$ 的解析表达式

$$y(t) = A \sin \theta + \frac{A \sin(T_s + \theta) - A \sin(-T_s + \theta)}{2T_s} t + \frac{A \sin(-T_s + \theta) + A \sin(T_s + \theta) - 2A \sin \theta}{2T_s^2} t^2$$

再经过三角函数变换后, 上式可以简化为

$$y(t) = A \sin \theta + \frac{A \sin(T_s) \cos \theta}{T_s} t + \frac{A [\cos(T_s) - 1] \sin \theta}{T_s^2} t^2$$

把其中的正弦、余弦函数在原点展开为幂级数, 展开公式^[3]如下

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

这样就可以把插值函数 $y(t)$ 在 $t=0$ 处展开成幂级数

$$\begin{aligned} y(t) &= A \sin \theta + \frac{A \cos \theta}{T_s} [T_s - \frac{3T_s^3}{3!} + \frac{5T_s^5}{5!} - \dots] t \\ &+ \frac{A \sin \theta}{T_s^2} [-\frac{2T_s^2}{2!} + \frac{4T_s^4}{4!} - \frac{6T_s^6}{6!} + \dots] t^2 = \\ &A \sin \theta + A \cos \theta t - \frac{A^2 \sin \theta}{2!} t^2 - \\ &\frac{A^3 \cos \theta}{3!} T_s^2 t + \frac{A^4 \sin \theta}{4!} T_s^2 t^2 + \\ &\frac{A^5 \cos \theta}{5!} T_s^4 t - \frac{A^6 \sin \theta}{6!} T_s^4 t^2 - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

同样将信号(3)在 $t=0$ 处展开成麦克劳林(Maclaurin)级数

$$\begin{aligned} D(t) &= A \sin \theta + A \cos \theta t - \frac{A^2 \sin \theta}{2!} t^2 - \\ &\frac{A^3 \cos \theta}{3!} t^3 + \frac{A^4 \sin \theta}{4!} t^4 + \\ &\frac{A^5 \cos \theta}{5!} t^5 - \frac{A^6 \sin \theta}{6!} t^6 - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)、(6)两式相减, 于是我们就得到了二次内插计算值的误差解析表达式

$$y(t) - D(t) = - \left[\frac{A^3 \cos \theta}{3!} t + \frac{A^4 \sin \theta}{4!} t^2 \right] (T_s^2 - t^2) + \left[\frac{A^5 \cos \theta}{5!} t - \frac{A^6 \sin \theta}{6!} t^2 \right] (T_s^4 - t^4) - \dots$$

不难判定, 这是一个收敛的交错级数, 由莱布尼兹(Leibniz)判别定理^[3], 余项绝对值小于其首项绝对值, 也就是

$$y(t) - D(t) < \left| - \frac{A^3 (T_s^2 - t^2) t \cos \theta}{6} + \frac{A^4 (T_s^2 - t^2) t^2 \sin \theta}{24} \right| \quad (7)$$

对于给定的触发采样时刻 t_c , 把 t_c 的数值代入上式中, 就得到此刻二次插值法的误差。此时误差成为信号初相角 θ 的函数

$$R(\theta) = - \frac{A^3 (T_s^2 - t_c^2) t_c \cos \theta}{6} + \frac{A^4 (T_s^2 - t_c^2) t_c^2 \sin \theta}{24}$$

根据三角函数性质, 可以知道

$$R(\theta)_{\max} = \sqrt{\left[\frac{A^3}{6} (T_s^2 - t_c^2) t_c \right]^2 + \left[\frac{A^4}{24} (T_s^2 - t_c^2) t_c^2 \right]^2} = \frac{A^3}{6} (T_s^2 - t_c^2) t_c \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} t_c\right)^2}$$

注意到 t_c 在区间 $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ 内, 所以上式中

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} t_c\right)^2} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} T_s\right)^2}$$

再根据不等式原理可以知道 $(T_s^2 - t_c^2) t_c$ 在 $t_c = \frac{T_s}{\sqrt{3}}$ 时得到最大值, 这样 t_c 时刻最大归一化(信号幅值为 1)误差为

$$E = \frac{R(\theta)_{\max}}{A} < \frac{3}{6} \frac{2T_s^3}{3\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{T_s}{16}\right)^2} = \frac{(T_s)^3}{9\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{T_s}{16}\right)^2} \quad (8)$$

式(8)就是二次插值法误差的解析表达式。根据这个关系式, 我们可以计算出某一采样频率下, 针对不同频率信号使用二次插值法的误差最大值。

如果系统工作在理论工频(50 Hz), 那么对其基波和

各次谐波信号使用二次插值法的最大误差如表 1。

表 1 理论工频下二次插值法的最大理论误差

Tab. 1 Maximal errors of quadratic interpolation method in theory when system operates at 50 Hz

| 采样频率 | 标准基波 (50 Hz 信号) | 标准 11 次谐波 (550 Hz 信号) | 标准 19 次谐波 (950 Hz 信号) | 标准 25 次谐波 (1250 Hz 信号) |
|----------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1.2 kHz (24 点/0.02 s) | 1.1535×10^{-3} | >1 | >1 | >1 |
| 1.6 kHz (32 点/0.02 s) | 4.8619×10^{-4} | 0.73455 | >1 | >1 |
| 6.4 kHz (128 点/0.02 s) | 7.5882×10^{-6} | 1.0191×10^{-2} | 5.3440×10^{-2} | 0.12401 |
| 19.2 kHz (384 点/0.02 s) | 2.8103×10^{-7} | 3.7442×10^{-4} | 1.9334×10^{-3} | 4.4139×10^{-3} |
| 68 kHz (1360 点/0.02 s) | 6.3259×10^{-9} | 8.4204×10^{-6} | 4.3400×10^{-5} | 9.8883×10^{-5} |

以上结果中,由于系统工作在理论工频(50 Hz),采样频率是信号频率的整数倍。但是实际情况中,工频会在 49.5~50.5 Hz 的范围内变化,而采样频率还是固定不变,从而导致频谱泄漏(即 $NT_s \neq T$)。二次插值算法多在这种情况下使用,所以计算此时的误差数值更有实际意义。

为了得到实际工频情况下二次插值法的误差最大值。从式(8)可以看出,信号频率较大(也就是较大)时,误差也较大,因此应该取系统基波频率为 50.5 Hz 代入计算。实际采样频率始终是固定的,所以保持上表的数值不变,结果如表 2。

表 2 实际工频下二次插值法的最大理论误差

Tab. 2 Maximal errors of quadratic interpolation method in theory when system operates at 50.5 Hz

| 采样频率 | 50.5 Hz 信号 基波 | 555.5 Hz 信号 (11 次谐波) | 959.5 Hz 信号 (19 次谐波) | 1262.5 Hz 信号 (25 次谐波) |
|----------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1.2 kHz (24 点/0.02 s) | 1.1885×10^{-3} | >1 | >1 | >1 |
| 1.6 kHz (32 点/0.02 s) | 5.0094×10^{-4} | 0.7585 | >1 | >1 |
| 6.4 kHz (128 点/0.02 s) | 7.8182×10^{-6} | 1.0501×10^{-2} | 5.5087×10^{-2} | 0.12788 |
| 19.2 kHz (384 点/0.02 s) | 2.8954×10^{-7} | 3.8577×10^{-4} | 1.9921×10^{-3} | 4.5481×10^{-3} |
| 68 kHz (1360 点/0.02 s) | 6.5175×10^{-9} | 8.6756×10^{-6} | 4.4715×10^{-5} | 1.0188×10^{-4} |

3 数值仿真

通过编制程序对二次插值作了仿真。仿真使用穷举法扫描信号的每一种可能形式。信号沿用正弦定义式(3), $D(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$, 取幅值为 1 ($A = 1$)。首先假设系统频率为 50 Hz ($\omega = 100$), 初相角 ϕ_0 取值从 $-\pi$ 至 π , 步长为 $\pi/1000$, t_c 取值从 $-T_s$ 至 T_s , 步长为 1×10^{-6} 。穷举所有情况后得到最大误差如表 3 所示。

表 3 理论工频下二次插值法仿真中的最大实际误差

Tab. 3 Maximal errors of quadratic interpolation method in simulation when system operates at 50 Hz

| 采样频率 | 标准基波 (50 Hz 信号) | 标准 11 次谐波 (550 Hz 信号) | 标准 19 次谐波 (950 Hz 信号) | 标准 25 次谐波 (1250 Hz 信号) |
|----------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1.2 kHz (24 点/0.02 s) | 1.1466×10^{-3} | 0.95432 | >1 | >1 |
| 1.6 kHz (32 点/0.02 s) | 4.8456×10^{-4} | 0.49597 | >1 | >1 |
| 6.4 kHz (128 点/0.02 s) | 7.5866×10^{-6} | 9.9347×10^{-3} | 4.9554×10^{-2} | 0.10899 |
| 19.2 kHz (384 点/0.02 s) | 2.8102×10^{-7} | 3.7336×10^{-4} | 1.9171×10^{-3} | 4.3498×10^{-3} |
| 68 kHz (1360 点/0.02 s) | 6.3208×10^{-9} | 8.4118×10^{-6} | 4.3336×10^{-5} | 9.8689×10^{-5} |

从表 1、表 3 可见,理论分析和数值仿真结果非常相近,表 1 的结果数值略大。

同样,实际工频情况下的误差结果更有实际意义。取信号频率从 49.5 Hz 至 50.5 Hz, 步长为 0.01 Hz, ϕ_0 和 t_c 的取值同前。注意到这个仿真过程中信号频率是任意的,而采样频率是固定的,采样频率不再是信号频率的整数倍(即 $NT_s \neq T$),可以对表 2 的结果作验证。仿真得到的最大误差如表 4。

表 4 实际工频下二次插值法仿真中的最大实际误差

Tab. 4 Maximal errors of quadratic interpolation method in simulation when system operates at 49.5-50.5 Hz

| 采样频率 | 49.5-50.5 Hz (基波信号) | 544.5-555.5 Hz (11 次谐波) | 940.5-959.5 Hz (19 次谐波) | 1237.5-1262.5 Hz (25 次谐波) |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| 1.2 kHz (24 点/0.02 s) | 1.1813×10^{-3} | 0.97383 | >1 | >1 |
| 1.6 kHz (32 点/0.02 s) | 4.9922×10^{-4} | 0.50826 | >1 | >1 |
| 6.4 kHz (128 点/0.02 s) | 7.8165×10^{-6} | 1.0232×10^{-2} | 5.1005×10^{-2} | 0.11201 |
| 19.2 kHz (384 点/0.02 s) | 2.8953×10^{-7} | 3.8466×10^{-4} | 1.9750×10^{-3} | 4.4808×10^{-3} |
| 68 kHz (1360 点/0.02 s) | 6.5123×10^{-9} | 8.6667×10^{-6} | 4.4649×10^{-5} | 1.0168×10^{-4} |

与表 1、表 3 的情况类似,表 2 的理论分析和表 4 的数值仿真结果非常相近,表 2 的结果数值略大。这是由于理论分析对误差值略有一些放大(式 7、式 8)。当然,数值仿真的步长还不够密,也是仿真结果数值小的原因之一。但是我们有理由相信,表 1、表 2 确实代表了最大的误差范围。进一步缩小仿真步长只能减小两表数值之间的差距,却不可能导致表 3、表 4 的结果超过表 1、表 2。

同时从表 2 还可以看出,二次插值的准确度还是很高的。在 1.2 kHz(24 点/周波)的采样频率下对基波插值的误差小于 0.2%,而在 68 kHz(1360 点/周波)的采样频率下,对 25 次谐波插值的最大误差在 0.01% 左右,完全可以满足各种数值分析的需

要。

4 结论

本文从理论分析的角度对正弦信号的二次插值算法误差进行了研究,得到了误差范围的解析表达式(式 8),并通过数值仿真验证了理论分析的结论。

通过这个解析表达式的简单计算,可以很方便地获知各种信号频率和采样频率下二次插值算法引入的最大误差。这对于掌握正弦信号数字测量的精度和选择采样频率有着指导意义,为测量结果的后续分析处理提供了理论基础,尤其适用于 PMU 等需要高精度频谱分析的自动化装置。

参考文献:

- [1] 李庚银,陈志业,宁宇(LI Gengyin, CHEN Zhiye, NING Yu). 快速傅里叶变换的两种改进算法(Two

Modified Algorithms for Fast Fourier Transform) [J]. 电力系统自动化(Automation of Electric Power Systems), 1997, 21(12): 37-40.

- [2] 袁慰平(YUAN Weiping). 数值分析(Numerical Analysis) [M]. 南京:东南大学出版社(Nanjing: Southeast University Press), 1992.
- [3] 陈传璋(CHEN Chuanzhang). 数学分析(Mathematical Analysis) [M]. 北京:高等教育出版社(Beijing: Higher Education Press), 1983.

收稿日期: 2004-02-04; 修回日期: 2004-03-01

作者简介:

赵磊(1974-),男,博士研究生,研究方向为电力系统稳定控制及通信; E-mail: leizhao@jonline.com

单渊达(1930-),男,博士研究生,长期从事电力系统运行分析及规划管理方面的研究;

李蔚(1971-),男,高级工程师,长期从事集成电路及 SoC 芯片设计。

Error analysis of quadratic interpolation method on sine wave signal

ZHAO Lei¹, SHAN Yuan-da¹, LI Wei²

(1. Southeast University, Nanjing 210096, China; 2. Shanghai Fudan Microelectronics Co., Ltd, Shanghai 200001, China)

Abstract: Quadratic interpolation method is often used to reduce spectrum leakage in signal processing. The error of quadratic interpolation method on sine wave signal was analytically studied and numerical evaluated in this paper. The expression of error range, which will be the guideline in estimating measurement error and choosing sample frequency, is proposed and demonstrated. Consequently, the error analysis of further signal processing can be made based on this result.

Key words: quadratic interpolation method; error analysis; power system measurement

许继进入 2004 年全国电子信息百强企业

5月26日,备受社会各界关注、经信息产业部严格审核的2004年(第18届)电子信息百强企业排定。许继集团进入百强,居第38位,同时河南省的安彩集团、新飞电器集团也名列百强之中,分别居第27位和55位。

本届全国电子信息百强企业是依据企业2003年营业收入排定的。山东海尔集团公司蝉联电子信息百强企业之首,联想控股有限公司、TCL集团股份有限公司分列第二、三名。

2003年,我国信息产业克服了国际不确定性因素增多和SARS等诸多不利因素,全行业依然保持了持续、快速发展的势头,全年完成工业增加值4000亿元,同比增长34%;实现销售收入1.88万亿元,同比增长34%。百强企业作为行业的主力军,在技术创新、资源优化配置、开拓市场、扩大开放、产权改革等方面取得了优异的成绩,进一步推动了企业做大做强,为建设电子强国奠定了基础。

本届电子信息百强企业体现了以下几个新特点:一、企业规模不断扩大,入围门槛继续提高;二、龙头企业成长壮大,行业带动作用明显;三、制度创新取得进展,企业活力不断提高;四、品牌价值显著提升,“走出去”取得新进展;五、加大技术创新力度,不断开拓新增长点。