

区间三角样条小波 (ITSW) 及其在电机故障信号边界问题处理中应用

胡国胜^{1,2}, 任震¹, 黄雯莹¹, 朱锋峰¹

(1. 华南理工大学电力学院, 广州 510640; 2. 广东省科技干部学院, 广州 510640)

摘要: 首先构造了区间上三角样条小波, 并将它应用到电机故障信号的检测中, 很好地解决了一些传统的著名小波, 如 Symmlet 小波、Daubechies 小波、Coiflets 小波、Meyer 小波等以及一些常用处理边界的方法, 如区间外数据补零、对称延拓、平滑法和周期延拓方法等不能解决的边界效应问题。区间三角样条小波具有对称性, 因而具有线性相位。在电机故障信号分解和重构中比补零法、对称延拓法、平滑法和周期延拓法精度高。

关键词: 区间三角样条小波; 小波变换; 电机故障信号; 边界效应

中图分类号: TM3; O17 文献标识码: A 文章编号: 1003-4897(2003)04-0010-05

1 引言

小波变换时频域具有良好的局部化性能, 因而较 Fourier 变换能更好地刻画电力系统突变信号瞬态特征。小波变换在电力系统中的应用集中于对故障信号分析与处理上, 包括突变信号的检测、突变点的定位和故障诊断。实际分析是对电力系统故障信号进行采样, 得到有限待分析的采样数据, 采样后的有限区间上的信号在端点处的值明显发生突变。但现有的小波函数, 如 Symmlet 小波、Daubechies 小波、Coiflets 小波、Meyer 小波等, 在实际应用时, 当分析信号的边界点无奇异时, 其小波变换也存在模极大值, 即存在边界效应, 而且小波系数存在振荡。这样, 当故障点恰好落在采样信号边界点旁边时, 就很难判断边界点旁边的模极大值是否是由信号本身的奇异性所引起的。为了消除这种现象, 解决问题的方法之一是增加数据采集窗的宽度, 但却极大地增加了计算量, 不利于实时分析。如文献[1]中为了分析 3 ms 的数据量, 采用了 9 ms 宽度的数据采集窗。另一种方法是采用延拓方法。如文献[2~5]大多采用区间外数据补零、对称延拓、平滑等延拓方法; 构造特定的小波变换如 Matlab 软件包中周期小波变换 (dwtper()) 或文献[6]中提及的平均插值小波变换, 把边界附近的多项式进行适当外延, 来求解边界处的小波变换系数, 从而具有边界自动校正特点等。以上这些方法没有真正很好地利用区间给定的数据来解决边界问题而且重构后的信号的误差较大。寻找一种有别于已有的小波并能真正解决边界问题的

区间小波变换是完全必要的。

过去人们构造区间小波的方法主要是折叠方法, 如 Meyer 曾利用 Daubechies 小波构造正交区间小波, 梁学章先生在文献[7]中提出由 B 样条小波构造的区间双正交小波以及徐淑珍构造的平均插值小波^[8]等。它们的主要思想是将区间小波函数折叠到区间内。本文构造区间小波的思想与它们截然不同, 它是通过在端点处设置重叠节点, 巧妙地构造区间上的三角样条小波。利用其边界校正的优点, 对信号进行分析, 可彻底消除这种现象, 减少了计算量, 提高了电力系统故障检测的准确性。

2 区间三角样条小波

与基数 B 样条一样, 一阶三角样条 TS1 (n = 1) 是定义在 (0, 1) 区间的特征函数 $\varphi_{(0,1)}(x)$:

$$T_1(x) = \varphi_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (1)$$

记 $x_j = j - 1, j \in \mathbb{Z}^+, T_{1,j}(x) = \varphi_{[j-1,j]}(x)$ 。n 阶三角样条函数的递推公式

$$T_{n,j}(x) = \left[\sin \frac{x - x_j}{2} T_{n-1,j}(x) + \sin \frac{x_{j+n} - x}{2} T_{n-1,j+1}(x) \right] / \sin \left[\frac{x_{j+n} - x_j}{2} \right] \quad (2)$$

定义

$$T_n(x) = \sin \left[\frac{x_{1+n} - x_1}{2} \right] T_{n,1}(x) \quad (3)$$

这样式(3)求得的 $T_n(x)$ 为 n 阶三角样条函数 TS_n。以 n 阶基数三角样条函数作为尺度函数构造出的小波函数为 n 阶三角样条小波 TSW_n。图 1 分

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50077008)

别为 TS1 ~ TS4 的图像:

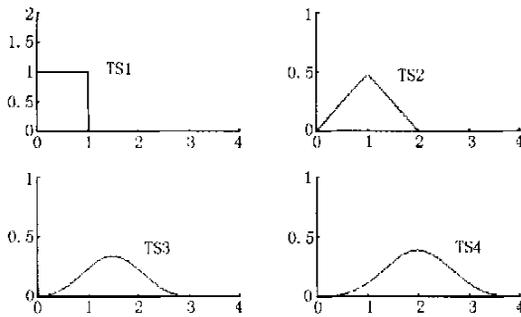


图1 基数三角样条函数 TS1 ~ TS4

Fig.1 Cardinal trigonometric spline functions TS1 ~ TS4

由文[10]知,基数三角样条函数和基数B样条函数的图像完全相同,都为对称“钟形”函数。令 $t_i = i/2, i = 0, 1, 2, \dots, t = \{t_i = i/2, i = 1, 2, \dots\}, \tau = \{\tau_i = i, i = 1, 2, \dots\}$ 而且 $s = t - \tau$ 或 $t = s + \tau$ 。记 S_t 为以节点 $t = \{t_i = i/2, i = 1, 2, \dots\}$ 构成的样条空间, S_τ 为以节点 $\tau = \{\tau_i = i, i = 1, 2, \dots\}$ 构成的样条空间。显然有 $S \subset S_t$ 。空间 S 在空间 S_t 中的正交补为 $W, S_t = S \oplus W$ 。子空间 S 中的三角样条是

$$\tilde{T}_i(x) = T_n(x - i) \quad (4)$$

子空间 S_t 中的三角样条是

$$\bar{T}_i(x) = T_{(n)/2}(x - i/2) \quad (5)$$

其中 $T_n(x)$ 是节点为 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ 的三角样条, $T_{(n)/2}(x)$ 是节点为 $\{0, 1/2, 1, \dots, n/2\}$ 的三角样条。定义

$$w_j = \sum_{i=1}^{3n-1} (-1)^{j-1} w_j \bar{T}_{j-1}(x) \quad (6)$$

其中,

$$w_j = \int_R \tilde{T}_0(x) \bar{T}_{2n-j}(x) dx \quad (7)$$

当 $n = 1$ 时, $\tilde{T}_0(x) = T_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$,

$$T_{(1)/2}(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$
。此时,由式(7)知 w_1

$$= \int_R T_1(x) T_{(1)/2}(x - 1/2) dx = \int_{1/2}^1 1 dx = \frac{1}{2}, w_2 =$$

$$\int_R T_1(x) T_{(1)/2}(x) dx = \int_0^{1/2} 1 dx = \frac{1}{2}$$
。因而,三角样条小波函数 TSW1 为:

$$w_1(x) = w_1 \bar{T}_0(x) - w_2 \bar{T}_1(x) = \frac{1}{2} T_{(1)/2}(x) - \frac{1}{2} T_{(1)/2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 1/2 \\ -1/2, & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

上式表明,一阶(零次)三角样条小波 TSW1 恰

好就是 Harr 小波,这与 B 样条小波推导结果是完全一致的^[9]。当 $n = 2$ 时, $w_1 \sim w_5$ 的值分别为:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0.0459	0.1149	0.1380	0.1149	0.0459

当 $n = 3$ 时, $w_1 \sim w_8$ 的值为:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
0.0096	0.0529	0.1580	0.1635	0.1635	0.1580	0.0529	0.0096

当 $n = 4$ 时, $w_1 \sim w_{11}$ 的值为:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
0.0018	0.0248	0.0747	0.1067	0.0899	0.1297	0.0899	0.1067	0.0747	0.0248	0.0018

定理1 对任意 $n \in \mathbb{Z}^+, (6)、(7)$ 定义的 $w_n(x)$ 是小波函数,并称之为 n 阶三角样条小波 TSW_n。图2列出了 1 ~ 4 阶三角样条小波时域波形。

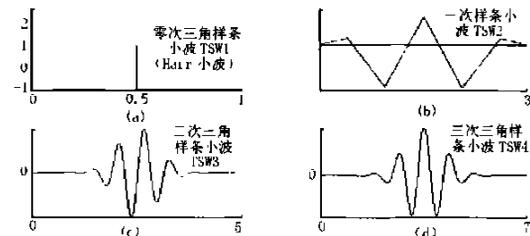


图2 四种三角样条小波 TSW1 ~ TSW4

Fig.2 The four kinds of trigonometric spline wavelets TSW1 ~ TSW4

从图2可看出,三角样条小波函数 $w_n(x)$ 对 $n = 1, 3$ 奇数时,呈反对称性;对 $n = 2, 4$ 偶数时呈对称性。事实上,由 $T_n(x)$ 的对称性和系数公式(7)的对称性知,对所有的 n ,小波函数 $w_n(x)$ 具有对称性或反对称性。因而 $w_n(x)$ 具有线性相位或广义线性相位^[9]。

定理2 对所有的正整数 n ,三角样条小波函数 $w_n(x)$ 对于偶数 n 是对称的, $w_n(x) = w_n(2n - x)$; 而对于奇数 n 是反对称的, $w_n(x) = -w_n(2n - 1 - x)$ 。因此,它们具有线性相位(对于偶数 n)和广义线性相位(对于奇数 n)。

上述构造的三角样条小波不仅能在 $2^j Z$ 节点上,而且在任意节点构造三角样条小波,如式(2)和(3)。这给我们构造区间上三角样条小波带来很大方便。比如,我们要构造 $L^2[0, 1]$ 上的三角样条小波,可以在端点处设置多重节点,这也是样条构造的常用处理方法。

定义3^[10] 对固定的 $j \in \mathbb{Z}^+$,令区间 $[0, 1]$ 上的节点

$$t^{(j)} := t^j, t_{n+1} := \begin{cases} t_k^{(j)} \\ k = -n+1, \dots, 2^j+n-1 \end{cases}$$

其中 $t^j_{-n+1} = t^j_{-n+2} = \dots = t^j_0 = 0$ (n 重节点 0);

$$t_k^{(j)} = k2^{-j}, k=1, \dots, 2^j - 1; \quad (8)$$

引理 4 对所有的 $j \leq N$, 只有满足 $2^j \leq 2n - 1$, 那么在 $W_j^{[0,1]}$ 中存在 $2^j - 2n - 2$ 个线性无关的内部小波 $\psi_{j,k}, k=0, \dots, 2^j - 2n + 1, \text{supp } \psi_{j,k} \subseteq [0, 1]$.

$$\psi_{n,j,k}(t) = \psi_n(2^j t - k), \quad (9)$$

其中, $\psi_n(t)$ 是 n 阶三角样条小波。

对于端点 0 有下面引理 5 得到。

引理 5 对所有满足条件 $2^j \leq 2n - 1$ 的 $j \leq N$, 存在 $n - 1$ 个端点 0 的边界小波, 它们的表达式为

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_{i=-n+1}^{-1} (\tilde{T}^{-1} r_k)^i T_{2n,i,t_n}^{(j+1)}(t) + \sum_{i=0}^{2n-2+2k} (-1)^i T_{2n,i,t_n}^{(j+1)}(t) \quad (10)$$

支撑区域为 $[0, (2n - 1 + k)2^{-j}]$, $k = -n + 1, \dots, -1$ 。

根据三角样条构造内在对称性, 通过代换 $\psi_{j,2n+1-k}(t) := \psi_{j,k}(1 - t)$ 后, 就能得到端点 1 处的边界小波函数。归纳起来, 得到下面定理 6。

定理 6 如果 $2^j \leq 2n - 1$, 则维数为 2^j 的区间小波空间 $W_j^{[0,1]}$ 是由下列函数张成: (1) 引理 4 中的内部小波 $\psi_{j,k}, k=0, \dots, 2^j - 2n + 1$; (2) 引理 5 中端点 0 边界小波 $\psi_{j,k}, k = -n + 1, \dots, -1$ 以及经变换后的端点 1 处边界小波 $\psi_{j,k}, k = 2^j - 2n + 2, \dots, 2^j - n$ 。它们统称为区间三角样条小波 (ITSW)。

图 3 显示在节点 $t^{(2)} = \{0, 0.1/4, 1/2, 3/4, 1, 1\}$ 上构造的 2 阶内部三角样条小波 $\psi_{2,0}, \psi_{2,1}$ 和边界三角样条小波 $\psi_{2,-1}, \psi_{2,2}$ 。

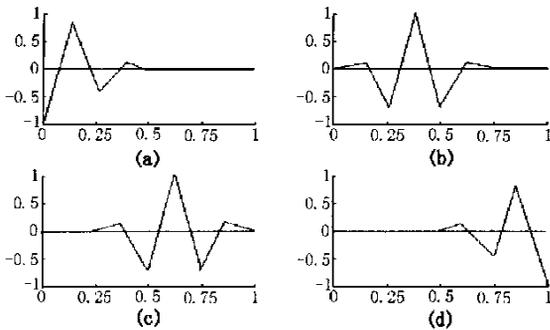


图 3 二阶区间三角样条小波 $\psi_{2,k}, k = -1, 0, 1, 2$
Fig. 3 2-th order TSW2 $\psi_{2,k}, k = -1, 0, 1, 2$ on interval

3 算例分析

3.1 故障信号边界附近突变点检测

早期的小波都是定义在无穷区间上的, 而实际问题常常是有限区间的。如电力系统中采样的故障信

号。一般的文献处理方法大致有两种^[2-6]: (1) 将有限区间上的数据向区间外延拓, 如补零方法、对称延拓方法、平滑方法以及周期延拓方法; (2) 构造区间小波, 如区间周期小波、折叠小波、平均插值小波等。著名的工具集成软件包 Matlab 正是基于上述处理方法。一般来说, 这些方法对不在端点附近的点都能较好地处理, 但对于边界点及其附近点来说都存在很大的误判, 如将正常点判为故障点 (突变点) 或者相反, 这些都是因为算法本身的缺陷所致, 本文的区间三角样条小波能从根本上解决这一问题。

电力系统正常运行时, 系统信号只有基波分量, 经过小波变换后在各个尺度下上平滑的, 不会发生模极大值。发生故障后, 三相故障信号除基波外, 常有衰减直流分量, 还有高次谐波, 在故障点出现奇异性, 故经各尺度小波变换后, 信号的小波变换出现模极大值。由此可判断及故障点的位置。文献[8]给出了各种故障模型, 这里采用其中的故障分析模型:

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{250}{3} \sin(\pi t + \pi/3) & (0 \leq t \leq 0.02) \\ 100 \sin(\pi t + \pi/4) + 10 \sin(2\pi t) + 40 \sin(3\pi t) + 20 \sin(5\pi t) + 10 \sin(7\pi t) + 100 e^{-100t} & (0.02 \leq t \leq 0.04) \end{cases}$$

为了便于比较, 选择 Db4 小波、双正交小波 Bior4.4 和本文的区间三角样条小波, 在相同数据采集窗宽度的情况下, 检测信号的故障点, 采样频率为 25.6 kHz, 取 1024 个采样点。如图 4~图 6 所示。

比较图 4~图 6 可知, 在不增加数据采集窗宽度的前提下, 不论边界点有无发生故障, Db4 小波、Bior4.4 双正交小波在边界点都存在模极大值, 因此难以判别出在边界点旁边是否发生弱小的故障; 用有限区间三角样条小波能有效地去除边界效应, 而且故障信号在变换域的最大系数值最大, 即能量更集中, 同时获得的故障信号能量也更多。

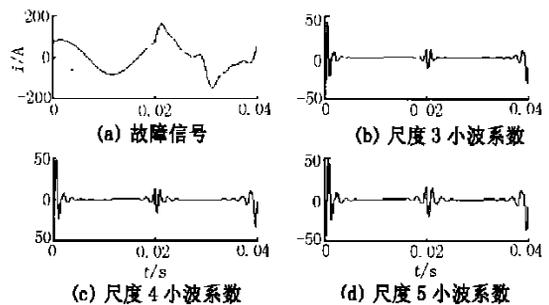


图 4 故障信号及 Db4 小波变换系数

Fig. 4 Fault signal and its WT coefficients based on Db4

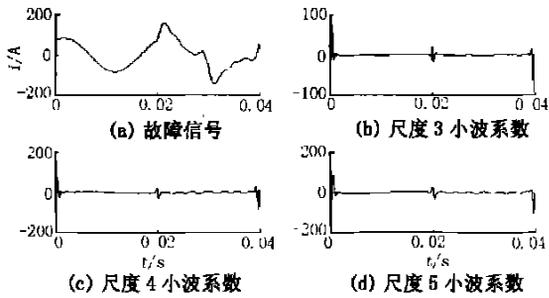


图5 故障信号及 Bior4.4 小波变换系数

Fig.5 Fault signal and its WT coefficients based on Bior4.4

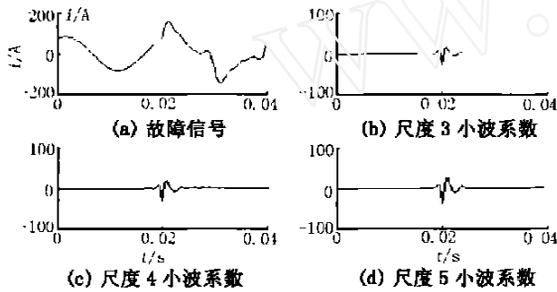


图6 故障信号及区间三角样条小波变换系数

Fig.6 Fault signal and its WT coefficients based on interval biorthogonal wavelet

3.2 实例分析

图7(a)为电动机C相接地故障信号,对地短路阻抗100,接在直流发电机上,其中电流9.2A,电压112V,不经调压器并满载运行。图7(b)为一般小波检测到突变点 $t=500$ 采样点。图7(c)为取图7(a)中 $t=1\ 502$ 采样点之间的故障信号,用传统小波进行处理时不易识别出端点附近的故障点如图7(d)所示;图7(f)运用本文有限区间二阶三角样条小波处理的结果,它能识别出端点附近 $t=500$ 采样点处的故障点。

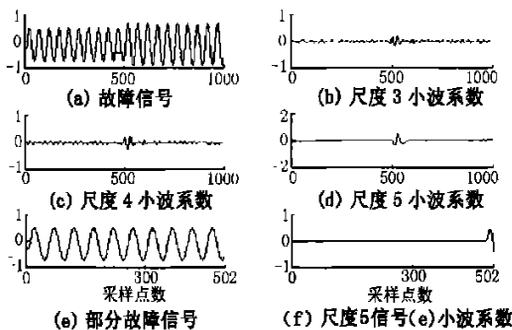


图7 故障信号及其不同小波突变点检测情况

Fig.7 The Fault Signal and Detection of Sudden changeable Point with General Wavelet and Finite Subset Biorthogonal wavelet

3.3 故障信号重构误差比较

Daubechies 已经证明,除了 Harr 小波外,具有紧支撑的正交小波都不具备对称性(或反对称性),即不具有线性相位或广义线性相位。众所周知,线性相位对信号的分解与重构是至关重要的,它能避免信号失真。

本文所用的区间三角样条小波具有紧支撑性,同时当 N 为奇数时,三角样条小波是对称的;当 N 为偶数时,三角样条小波具有反对称性。因而本文的三角样条小波具有紧支撑性、正交性以及线性相位,对信号的分解与重构比传统小波变换要好。

图8示出了用各种方法对某异步电动机断条故障信号进行重构后的波形及误差。表1列出了各种方法重构信号的最大误差,从表中也可看出,运用区间正交小波方法比其它方法的误差相比小2个数量级,显示该方法更精确。

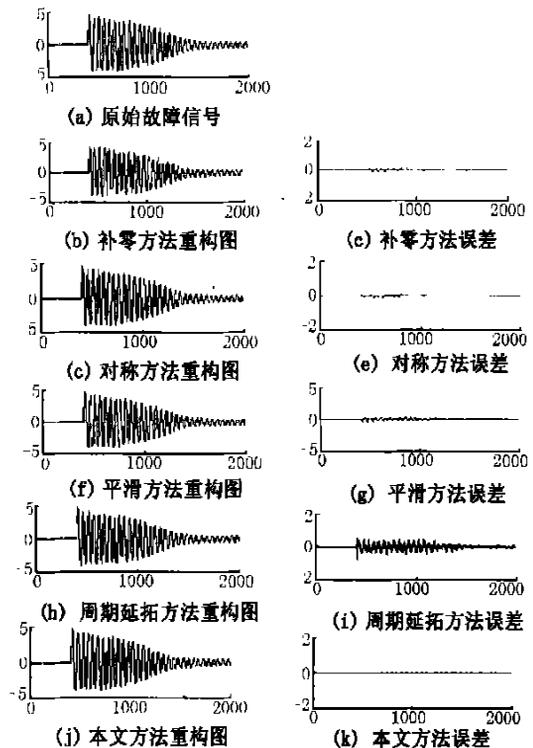


图8 原始故障信号及各种方法重构图和误差图

Fig.8 The original fault signal and reconstructed charts and error charts with some kinds of methods.

表1 各种方法重构信号最大误差比较

Tab.1 Maximum errors of some different methods

	补零法	对称法	平滑法	周期延拓法	本文方法
最大误差	1.8918e-012	8.1690e-013	2.5846e-012	1.1317e-012	2.1432e-015

4 结论

实际电机故障信号采样数据是有限区间的,直接运用传统小波变换存在边界问题,改进的一些方法对边界问题的解决有一定帮助,但真正充分利用区间中已采样的数据解决边界问题还未出现。本文构造了区间三角样条小波并运用其对故障信号进行处理,能充分利用区间内数据。从文中我们可得到如下一些结论。

(1) 本文构造的区间三角样条小波不仅具有紧支撑性和半正交性,而且具有(广义)线性相位。

(2) 实际采样后的信号只是有限区间上信号,传统的小波方法对故障信号的端点附近的故障点往往无能为力,本文的区间三角样条小波既能识别区间内的故障点又能识别端点附近的突变特性(小波变换模极大值)。消除了边界效应引起端点处的突变现象。

(3) 区间三角样条小波在信号分解与重构过程中比传统的补零方法、对称方法、平滑方法以及周期延拓方法误差都要小,这与理论分析是一致的。

参考文献:

- [1] Chaari O, Meunier M, Brouaye F. Wavelets: A new tool for the resonant grounded power distribution systems relaying[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1996, 11(3):1301~1308.
- [2] 石志强,任震,黄雯莹. 基于B-小波的异步电机故障信号去噪和检测[J]. 电力系统自动化,1997. 21(6):38~41.
- [3] Bruce A, Gao H. Y. Applied Wavelet Analysis with S Plus [M]. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1996.

- [4] Thuillard M. Wavelets in Soft Computing[M]. World Scientific publishing Co. Pte. Ltd. Switzerland, 2001.
- [5] Angrisan L, et al. A Measurement Method Based on the Wavelet Transform for Power Quality Analysis. IEEE Trans. on Power Delivery, 1998, Vol. 13(4): 990~998.
- [6] 李贵存,刘万顺,贾清泉,等. 利用小波原理检测电流互感器饱和的新方法[J]. 电力系统自动化, 2001, Vol. 25(5):36~39,44.
- [7] 梁学章,刘明才. 区间上的双正交小波的一种构造方法[J]. 高等学校计算数学学报, 2000, Vol. 22(4):341~352.
- [8] 徐淑珍,陈陈,朱子述. 平均插值小波在故障检测中的应用[J]. 电力系统自动化, 2000, 24(24):30~33.
- [9] Chui C K. An Introduction to Wavelets[M] Academic Press, INC. 1992.
- [10] 黄友谦,李岳生. 数值逼近(第二版)[M]. 高等教育出版社,北京:1983
- [11] Schumaker L.L. Spline Functions: Basic Theory[M], Wiley Interscience, New York, 1981.
- [12] Mallat S, Hwang W. Singularity detection and processing and processing with wavelets [J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1992, 38(2):617~643.

收稿日期: 2002-07-25; 修回日期: 2002-12-10

作者简介:

胡国胜(1965-),男,博士,从事小波理论研究及其在电力系统中的应用。

任震(1938-),男,教授,博士生导师,国务院学位委员会电气工程学科组成员,长期从事小波分析及其在电力系统中的应用、高压直流输电、电力系统规划与可靠性等领域的科研和教学工作。

黄雯莹(1939-),女,教授,长期从事小波分析、可靠性数学等领域的科研和教学工作。

Interval Trigonometric Spline Wavelets(ITSW) and its Application to Boundary Problem of Fault Signals of Electric Machine

HU Guo-sheng^{1,2}, REN Zhen¹, HUANG Wen-ying¹, ZHU Feng-feng¹

(1. Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. Guangdong Institute of Technical Personnel, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In this paper, trigonometric spline wavelets on the interval(ITSWs) are presented and applied to detect the fault signals of electric machine. The boundary problems have been solved perfectly using ITSWs, which can not being solved using some traditionally famous wavelets - Symmlets, Daubechies, Coiflets, Meyer wavelets et al. and some usually used methods - filling zero, symmetric extending, smoothing, periodically extending methods. ITSWs are symmetric wavelets, the decompression and reconstruction errors of fault signals of electric machine are less than filling zero, symmetric extending, smoothing, periodically extending methods.

Key words: trigonometric spline wavelet on the interval; wavelet transform; fault signals of electric machine; boundary effect