

电路中的对偶现象

康丽生¹, 康润生²

(1. 郑州经济干部管理学院, 河南 郑州 450052; 2. 焦作工学院电气工程系, 河南 焦作 454000)

摘要: 论述了电路中普遍存在的对偶现象, 主要表现在对偶元件、对偶电路和对偶定律。利用对偶性有助于研究和设计各种应用电路。

关键词: 对偶元件; 对偶电路; 对偶定律; 对偶原理

中图分类号: TM91 文献标识码: B 文章编号: 1003-4897(2003)03-0079-02

1 引言

一一对应、成双成对出现的事物称为对偶事物。在电路中, 对偶现象普遍存在。

2 对偶元件

电阻元件的电压电流关系式为 $u = Ri$

电导元件的电压电流关系式为 $i = Gu$

如果把电压 u 与电流 i 互换, 电阻 R 与电导 G 互换, 上述两式可以彼此转换。这些互换元素称为对偶元素。所以电压 u 与电流 i 是对偶物理量, 电阻 R 与电导 G 是对偶参数, 上述两式是对偶关系式, 而电阻元件和电导元件是对偶元件。

电容元件与电感元件是对偶元件, 因为电容元件有

$$i = C \frac{du}{dt}; \quad W_C = \frac{1}{2} Cu^2$$

电感元件有

$$u = L \frac{di}{dt}; \quad W_L = \frac{1}{2} Li^2$$

其中 W_C 是电容元件储存的电场能量, W_L 是电感元件储存的磁场能量。由上述两式可以看出, L 和 C 是对偶参数, 电场和磁场是对偶场。

受控电压源与受控电流源是对偶元件, 因为

受控电压源的电压 $u_C = \mu u_1$ 或 $u_C = n_1$

受控电流源的电流 $i_C = i_1$ 或 $i_C = g u_1$

其中 u_1 和 i_1 是控制量。控制系数 μ 和 n_1 、 r 和 g 是对偶系数。

电压源与电流源是对偶元件。因为电压源对外输出确定时间函数的电压 $u_s(t)$, 而电流源对外输出确定时间函数的电流 $i_s(t)$ 。

3 对偶定律

基尔霍夫定律是集总电路普遍适用的定律。

基尔霍夫电流定律(KCL): 在任一时刻, 对任一结点, 所有支路电流的代数和为零, 即 $i = 0$ 。

基尔霍夫电压定律(KVL): 在任一时刻, 对任一回路, 所有支路电压的代数和为零, 即 $u = 0$ 。

显然, 支路电流与支路电压是对偶物理量, KCL 与 KVL 是对偶定律。

4 对偶电路

图 1 是 n 个电阻的串联电路, 图 2 是 n 个电导的并联电路。

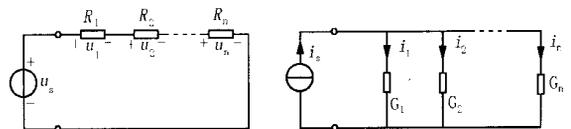


图 1 串联电路

图 2 并联电路

对图 1 有:

串联电阻的等效电阻 $R = \sum_{k=1}^n R_k$

电压分配公式 $u_k = \frac{R_k}{R} u_s$

对图 2 有:

并联电导的等效电导 $G = \sum_{k=1}^n G_k$

电流分配公式 $i_k = \frac{G_k}{G} i_s$

显然, 串联电路与并联电路的关系式对偶, 所以串联电路与并联电路是对偶电路。

实际电源的两种电路模型如图 3 和图 4 所示。电压源 u_s 与电阻 R_s 串联组合对外电路输出的电压为

$$u = u_s - R_s i$$

电流源 i_s 与电导 G_s 的并联组合对外电路输出的电流为

$$i = i_s - G_s u$$

上述两式互为对偶,因此实际电源的两种电路模型是对偶电路。

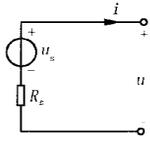


图3 串联组合

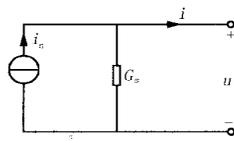


图4 并联组合

图5 电路的网孔电流方程为

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) i_{m1} - R_2 i_{m2} &= u_{s1} \\ -R_2 i_{m1} + (R_2 + R_3) i_{m2} &= u_{s2} \end{aligned}$$

图6 电路的结点电压方程为

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2) u_{n1} - G_2 u_{n2} &= i_{s1} \\ -G_2 u_{n1} + (G_2 + G_3) u_{n2} &= i_{s2} \end{aligned}$$

上述两组方程中,网孔电流 i_m 与结点电压 u_n 互为对偶,网孔自阻与结点自导互为对偶,网孔互阻与结点互导互为对偶,因此,图5与图6是对偶电路。

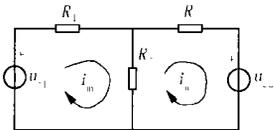


图5

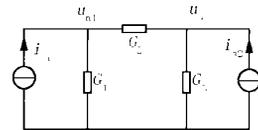


图6

用相量法分析正弦稳态电路时,一端口的参数阻抗 Z 和导纳 Y 的定义为

$$Z = \frac{U}{I} \quad Y = \frac{I}{U}$$

因此,阻抗 Z 与导纳 Y 是对偶参数。

图7是 $R、L、C$ 串联电路,图8是 $G、L、C$ 并联电路。对图7有:
串联电路的等效阻抗

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

端电压 U 与电流 I 的关系

$$U = ZI$$

串联谐振时阻抗最小,电流最大,且有 $U_L + U_C = 0$,所以串联谐振又称为电压谐振。对图8有:
并联电路的等效导纳

$$Y = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

端电流 I 与电压 U 的关系

$$I = YU$$

并联谐振时导纳最小,电压最大,且有 $I_L + I_C = 0$,所以并联谐振又称为电流谐振。

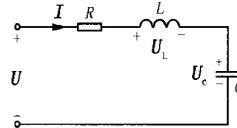


图7 $R、L、C$ 串联电路

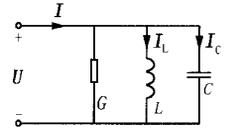


图8 $G、L、C$ 并联电路



图9 线性二端口网络

图9是线性二端口网络,其 Y 参数方程为

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ I_2 &= Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 \end{aligned}$$

Z 参数方程为

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}$$

上述两组方程式中 Y 是短路导纳参数, Z 是开路阻抗参数,显然,它们互为对偶。

5 结束语

电路中的对偶现象之所以存在,是因为它们的数学表示形式完全相似。所以通过对偶元素互换,两个关系式或两组方程式彼此转换,对应电路彼此转换。根据电路中的对偶现象,可以推导出对偶原理:电路中某些关系式或方程组用它们的对偶元素置换后,所得新的关系式或方程组也一定成立,两者互为对偶。

根据对偶原理,如果推导出某一关系式或结论,和它对偶的关系式或结论也一定存在。所以研究对偶现象具有重要的实际意义,利用对偶性可以启发和帮助电路设计者从不同的角度去设计所需要的应用电路。

参考文献:

- [1] 邱关源. 电路(第4版)[M]. 北京:高等教育出版社, 1999.
- [2] 周守昌. 电路原理[M]. 北京:高等教育出版社, 1998.

收稿日期: 2003-01-06

作者简介:

康丽生(1962-),女,郑州经济干部管理学院讲师;
康润生(1957-),女,副教授。