机组组合问题的罚函数法

王承民，郭志忠

(哈尔滨工业大学，黑龙江 哈尔滨　150001)

摘要：机组组合问题是一个大规模的非线性、0、1 变量混合整数规划问题，是一个难问题。以罚函数方法解决 0、1 变量整数规划问题是一个新的尝试。文中考虑包括发电机爬坡约束和时间约束等动态约束在内的多种约束条件，对机组组合问题的 0、1 变量进行松弛，并在目标函数中增加一个惩罚函数项，将问题变换成一个非线性连续变量的规划问题，以 SQP 法求解。本算法经过一个简单的算例检验，说明是行之有效的。

关键词：机组组合；　非线性规划；　罚函数法

中图分类法：TM73　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1003-4897(2001)11-0009-04

1　引言

机组组合问题无论是在传统的经济调度还是在电力市场环境下都是一个难问题。机组组合问题就是在一定的运行周期内通过合理地开、停机组，并满足各种运行条件，以达到总运行成本最低的目标。目前，已经提出了各种算法用于解决机组组合问题，主要有排队法[1]，动态规划法[2]，混合整数规划法[3]，拉格朗日松弛法[4]等等。

排队法是一种简单的机组组合方法，为了满足机组和系统的安全约束，排队法常常与启发式方法结合起来一同使用。排队法的优点是计算速度快，占用的内存少，但算法较粗糙，常常找不到最优解。动态规划方法是解决机组组合问题比较成功的方法，主要优点是可以处理发电机组的时间约束，但是无法避免“维数灾”问题；其次，对于不能很好地处理发电机组的爬坡约束，只能采取近似的方法。混合整数规划方法是以“列举”为基础的，对于不满足约束条件的分支切除，这种方法也同样不可避免地陷入“维数灾”问题中。拉格朗日松弛方法是一种现代启发式方法，常以动态规划方法为基础，来处理时间约束，在处理发电机组的爬坡约束方面也没有什么优点。此外，还有遗传算法、模拟退火等算法，所有的这些方法在文献[5]、[6]中已详细介绍。

文中以罚函数方法为基础，考虑包括发电机组爬坡约束和时间约束在内的多种约束条件，对机组组合问题的 0、1 变量进行松弛，在目标函数中增加一个罚函数项，将问题变换成一个非线性、连续变量的优化问题，并通过 SQP 方法对此问题进行求解。这种方法的优点在于：①将整数规划问题转换成连续变量的优化问题，可以有效地避免“列举法”所带来的“维数灾”问题；②可以避免“启发式方法”在数学上的不严格性及在工程实际中的局限性。

2　机组组合问题数学模型

2.1　目标函数

机组组合问题的目标函数是为了使系统的运行费用最小，可以写成如下形式：

$$\min z_0 = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} F_{i,t}(P_{i,t}, x_{i,t}, t_{i,t}^{\mathrm{on}}, t_{i,t}^{\mathrm{off}}) \qquad (1)$$

式中　$i = 1, 2, \cdots N$，为系统中的机组数量；$t = 1, 2, \cdots T$，为一个计划周期内的时段数；$P_{i,t}$为第 i 台机组在第 t 时段的出力；$x_{i,t}$为第 i 台机组在第 t 时段的开、停状态，$x_{i,t} \in \{0, 1\}$；$t_{i,t}^{\mathrm{on}}$为第 i 台机组连续开机到 t 时段的开机时间；$t_{i,t}^{\mathrm{off}}$为第 i 台机组连续停机到 t 时段的停机时间；$F_{i,t}$第 i 台机组在第 t 时段的运行费用，分别为机组出力 $P_{i,t}$、机组开、停状态 $x_{i,t}$ 及机组的运行时间 $t_{i,t}^{\mathrm{on}}$和停机时间 $t_{i,t}^{\mathrm{off}}$的函数。

2.2　约束条件

在经济目标下，系统的约束条件主要是为了电力系统能够安全、稳定地运行，这些约束可以分为静态约束和动态约束，和单一时段相关联的是静态约束；和多个时段相关联的是动态约束。本文主要考虑如下约束条件：

2.2.1　静态约束

a、发电机组出力上、下限约束：

$$\begin{cases} P_{i,t} \geq P_{i,t}^{\min} & (i = 1, 2, \cdots, N;\ t = 1, 2, \cdots T) \\ P_{i,t} \leq P_{i,t}^{\max} & (i = 1, 2, \cdots, N;\ t = 1, 2, \cdots T) \end{cases} \qquad (2)$$

b、系统功率平衡约束：

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,t} P_{i,t} = P_{d,t} \quad (t = 1, 2, \cdots T) \qquad (3)$$

c、系统旋转备用约束：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_{i,t} P_{i,t}^{\max} - \sum_{i=1}^{N} x_{i,t} P_{i,t} \geq S_{\max,t} \quad (t = 1,2,\cdots T) \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i,t} P_{i,t} - \sum_{i=1}^{N} x_{i,t} P_{i,t}^{\min} \geq S_{\min,t} \quad (t = 1,2,\cdots T) \end{cases} \tag{4}$$

2.2.2 动态约束

a、发电机出力上升、下降速度约束:

$$\begin{cases} x_{i,t} P_{i,t} - x_{i,t-1} P_{i,t-1} \leq R_{i,\max} \\ \qquad (i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T) \\ x_{i,t-1} P_{i,t-1} - x_{i,t} P_{i,t} \leq R_{i,\min} \\ \qquad (i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T) \end{cases} \tag{5}$$

b、发电机组的开、停时间约束:

$$\begin{cases} t_{i,t}^{\text{on}} \geq T_{i,\min}^{\text{on}} \quad (i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T) \\ t_{i,t}^{\text{off}} \geq T_{i,\min}^{\text{off}} \quad (i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T) \end{cases} \tag{6}$$

式中 $P_{d,t}$为系统在 t 时段的负荷; $P_{i,t}^{\max}$, $P_{i,t}^{\min}$为第 i 台机组在 t 时段的最大、最小出力; $S_{\max,t}$为系统旋转上备用要求; $S_{\min,t}$为系统旋转下备用要求; $R_{i,\min}$为第 i 台机组的出力最大下降速度限值; $R_{i,\max}$为第 i 台机组的出力最大上升速度限值; $T_{i,\min}^{\text{on}}$为第 i 台机组的最小开机时间; $T_{i,\min}^{\text{off}}$为第 i 台机组的最小停机时间。

3 整数规划的罚函数法

将非线性、含有 0、1 变量的混合整数规划问题的数学模型描述如下:

目标函数:

$$\min \quad f(\underline{u},\underline{y}) \tag{7}$$

约束条件:1) 等式约束:

$$g_i(\underline{u},\underline{y}) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots m \tag{8}$$

2) 不等式约束:

$$h_j(\underline{u},\underline{y}) \leq 0 \qquad i = 1,2,\cdots n \tag{9}$$

其中, $\underline{u}$ 为状态变量向量; $\underline{y}$ 为控制变量向量, 取值为 0 或 1。

为了将上述问题转换成连续变量的优化问题, 构造罚函数如下:

$$I(\underline{y}) = M\underline{y}^T(\underline{e} - \underline{y}) \tag{10}$$

其中, M 与 f 相比是一个大的一个正数; $\underline{e}$ 为分量全为1的列向量; 将变量 $\underline{y}$ 的取值范围进行松弛, $\underline{y} \in [0,1]$。因此, 上述罚函数满足:

1) 当控制变量 $\underline{y}$ 的取值为 0 或 1 时, $I(\underline{y}) = 0$;

2) 否则, $I(\underline{y})$ 是一个非常大的正数;

在寻优过程中, 罚函数 $I(\underline{y})$ 保证变量 $\underline{y}$ 的取值感只能是 0 或 1。从而, 原问题(1)～(3)可以写成:

目标函数:

$$\min \quad f(\underline{u},\underline{y}) + I(\underline{y}) \tag{11}$$

约束条件:1) 等式约束:

$$g_i(\underline{u},\underline{y}) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots m \tag{12}$$

2) 不等式约束:

$$h_j(\underline{u},\underline{y}) \geq 0 \qquad j = 1,2,\cdots n \tag{13}$$

$$0 \leq \underline{y} \leq 1 \tag{14}$$

其中, 式(14)保证罚函数项为正。由此可以得出, 问题(11)～(14)与原问题是等价的, 这样就将混合整数转换为连续变量的非线性规划问题。

4 机组组合问题算法描述

4.1 目标函数及 0、1 变量的处理

机组的运行费用一般是由两部分组成的, 机组的煤耗和起机费用, 一般来说, 发电成本通常是机组出力的二次函数:

$$q_{i,t}(P_{i,t}) = a_{i,t} P_{i,t}^2 + b_{i,t} P_{i,t} + c_{i,t} \tag{15}$$

式中 $i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T$; $q_{i,t}$为第 i 台机组在 t 时段的发电成本; $a_{i,t}, b_{i,t}, c_{i,t}$为机组的费用系数;

考虑机组的开、停状态, 机组的运行费用为:

$$F_{i,t} = (a_{i,t} P_{i,t}^2 + b_{i,t} P_{i,t} + c_{i,t})\, x_{i,t} \tag{16}$$

由于将开机费用折算到发电成本中, 所以机组的运行费用实际上只是机组出力 $P_{i,t}$、机组开、停状态 $x_{i,t}$的函数。将机组开、停状态变量 $x_{i,t}$的取值范围进行松弛, 变为:

$$0 \leq x_{i,t} \leq 1 \quad (i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T) \tag{17}$$

同时, 在目标函数中应该加上惩罚项:

$$Mx_{i,t}(1 - x_{i,t}) \quad (i = 1,2,\cdots,N;\ t = 1,2,\cdots T) \tag{18}$$

其中 M 为一大的正数。则最终的目标函数为:

$$F_{i,t} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}[(a_{i,t} P_{i,t}^2 + b_{i,t} P_{i,t} + c_{i,t})\, x_{i,t} + Mx_{i,t}(1 - x_{i,t})] = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} x_{i,t}[a_{i,t} P_{i,t}^2 + b_{i,t} P_{i,t} + c_{i,t} + M(1 - x_{i,t})] \tag{19}$$

4.2 时间约束的处理

式(6)所表示的机组开、停机时间约束是一种笼统的表示方法, 为了进行精确计算, 需要详细描述。机组的连续开机时间和连续停机时间是一个时间累加的过程, 因此, 开、停机时间可以表示成一个递推公式:

$$t_{i,t}^{\text{on}} = (t_{i,t-1}^{\text{on}} + T_0)\, x_{i,t} \tag{20}$$

$$t_{i,t}^{\text{off}} = (t_{i,t-1}^{\text{off}} + T_0)(1 - x_{i,t}) \tag{21}$$

且应满足如下的条件:

$$(t_{i,t-1}^{\text{on}} - T_{i,\min}^{\text{on}})(x_{i,t-1} - x_{i,t}) \geq 0 \tag{22}$$

$$(t^{\mathrm{off}}_{i,t-1} - T^{\mathrm{off}}_{i,\min})(x_{i,t-1} - x_{i,t}) \le 0 \qquad (23)$$

其中　$i = 1, 2, \cdots N$;　$t = 2, 3, \cdots, T$(因为在第一时段,机组的开、停机时间是一个历史值,是已知的);　T_0 为每一时段的时间间隔。

式(22)和(23)说明,只有在机组的运行状态发生变化(由开到停或由停到开)时,判断机组的连续开机和连续停机时间是否满足约束条件才有意义。由此,$t^{\mathrm{on}}_{i,t}$和 $t^{\mathrm{off}}_{i,t}$完全表示成变量 $x_{i,t}$的函数。

经过上述处理后,机组组合问题由 0、1 变量的优化问题变为一个完全的非线性规划问题,增加了约束条件(17)。这个非线性规划问题是由目标函数(19)、约束条件(2)～(5)、(20)～(23)及(17)式组成的,此非线性规划的状态变量为 $P_{i,t}$、$x_{i,t}$及 $t^{\mathrm{on}}_{i,t}$和 $t^{\mathrm{off}}_{i,t}$。

4.3　非线性规划的 SQP 法

对于上述非线性规划问题,本文采用 SQP(序列二次规划)的方法来解。非线性规划问题的一般描述为:

目标函数:

$$\min_{\underline{y}} f(\underline{y}) \qquad (24)$$

约束条件:

$$\underline{G(y)} \le 0 \qquad (25)$$

其中:$\underline{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T$ 为向量,$\underline{G(y)} = [g_1(y) \quad g_2(y) \quad \cdots \quad g_m(y)]^T$ 为函数向量,$f(\underline{y})$ 为标量函数,$f(\underline{y})$、$\underline{G(y)}$ 均可为非线性函数,$\underline{G(y)}$ 可以为等式约束,也可以为不等式约束。

SQP 方法的基本思想是对下面的 Lagrange 函数做二次近似:

$$L(\underline{y}, \lambda) = f(\underline{y}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{y}) \qquad (26)$$

形成目标函数:

$$\min \quad \frac{1}{2}\underline{d}^T \underline{H_k d} + \underline{\nabla f(y_k)^T d} \qquad (27)$$

对约束条件做线性近似,形成新的约束条件:

$$\begin{aligned} &\underline{\nabla g_i(\underline{y}^k)^T d} + g_i(\underline{y}^k) = 0 \quad i = 1, \cdots, m_e \\ &\underline{\nabla g_i(\underline{y}^k)^T d} + g_i(\underline{y}^k) \le 0 \quad i = m_e, \cdots, m \end{aligned} \qquad (28)$$

式中　$\underline{d} = \underline{y}^{k+1} - \underline{y}^k$;$\underline{y}^k$、$\underline{y}^{k+1}$分别为第 k 次和第 $k+1$ 次迭代的状态变量;$\underline{H}^k$ 为第 k 次迭代的海森矩阵;m_e 为等式约束条件的数量。

在每一次迭代中,$\underline{H}^k$ 均作为 Lagrange 函数的海森矩阵的正定拟牛顿近似,并通过 BFGS 方法进行计算,当 $\underline{d} = 0$ 时停止计算。具体论述参见文献[7]、[8]。

5　算例

为了计算方便和说明本方法的有效性,对一个简单系统进行计算,此系统含有 2 台机,优化周期为 3 小时,划分为 3 个时段($T_0 = 1$),机组的技术参数如表 1 所示;系统示意图如图 1 所示。

表 1　机组技术数据

机组	a	b	c	$P_{i,\min}$	$P_{i,\max}$	$T^{on}_{i,\min}$	$T^{off}_{i,\min}$	$R_{i,\min}$	$R_{i,\max}$	$t^{on}_{i,0}$
1	2.4360	2.5237	0.012	2.4	12	2	2	8	8	3
2	2.4379	2.5255	0.0121	2.4	12	2	2	8	8	3

(各参数的单位:a ——元/MW²;b ——元/MW;c ——元;$P_{i,\min}$、$P_{i,\max}$ ——MW;$T^{on}_{i,\min}$、$T^{off}_{i,\min}$ ——h(小时);$R_{i,\min}$、$R_{i,\max}$ ——MW/h;$t^{on}_{i,0}$ ——h)

其中,$t^{on}_{i,0}$为初始开机时间,相应的初始停机时间为 0。为了说明本算法的有效性,对不同的负荷水平进行计算,首先计算负荷水平较低时的机组组合,系统数据如表 2 所示,计算结果如表 3 所示。

表 2　系统 1 数据

时段	$P_{D,t}$(MW)	$S_{\min,t}$(MW)	$S_{\max,t}$(MW)
1	3	0.2	0.2
2	4	0.2	0.2
3	5	0.2	0.2

表 3　系统 1 的机组组合计算结果

计算结果	时段 1		时段 2		时段 3	
	机组 1	机组 2	机组 1	机组 2	机组 1	机组 2
$P_{i,t}$	3.0365	3.0000	5.4916	4.0000	6.7054	5.0000
$x_{i,t}$	0	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000
$t^{on}_{i,t}$	3.0000	3.0000	0.0000	4.0000	0.0000	5.0000
$t^{off}_{i,t}$	-0.0000	0.0000	1.0000	-0.0000	2.0000	-0.0000

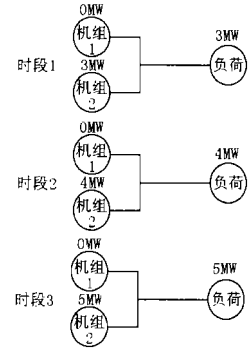

图 1　系统示意图

从表 3 可见,计算结果符合各种约束条件,机组开、停状态变量和开、停机时间状态变量取值完全为整数,总的运行费用为 152.2373 元。将系统的负荷增大,数据如表 4 所示,计算结果显示在表 5 中。

表 4 系统 2 数据

时段	$P_{D,t}$(MW)	$S_{\min,t}$(MW)	$S_{\max,t}$(MW)
1	16	0.5	0.5
2	17	0.5	0.5
3	18	0.5	0.5

表 5 系统 1 的机组组合计算结果

计算结果	时段 1		时段 2		时段 3	
	机组 1	机组 2	机组 1	机组 2	机组 1	机组 2
$P_{i,t}$	8.0035	7.9965	8.5035	8.4965	9.0037	8.9963
$x_{i,t}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$t_{i,t}^{on}$	3.0000	3.0000	4.0000	4.0000	5.0000	5.0000
$t_{i,t}^{off}$	0	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000

在表 5 中显示,由于系统负荷增大,任意一台机组无法满足系统的需求,因此两台机组都开机,运行费用为 1.1877×10^3 元。

6 结论

经 SQP 方法计算表明,将机组组合问题转换成非线性规划问题是完全可行的,虽然对一个小的系统进行验算,但对于一个大的系统,由于非线性规划技术的发展,解决一个大规模的非线性规划问题是不成问题的。

同传统的启发式算法相比较,由于启发式方法有时不能符合系统的实际情况,在实际工程中常常会遇到无法解决的情形。将机组组合问题转换成非线性规划问题,虽然很有可能得到的是局优解,但是解决问题的途径显得简便、实用,有规律可寻。此外,随着非线性规划技术的发展,机组组合问题一定会解决地更好。

参考文献:

[1] Lee F N, Feng Q. Multi-Area Unit COmmitment. IEEE Transactions on PWRS, Paper 91 WM 180-0, New York, 1991.

[2] Pang C K, Sheble G B and Albuyyeh F. Evaluation of Dynamic Programming Based Method and Multiple Area Representation for Thermal Unit Commitment. IEEE Trans On PAS, 1981, 100/3.

[3] Habibollahzadeh H, and Bubenko J A. Application of Decomposition Techniques to Short-Term Operation PLanning of Hydrothermal Power System. IEEE Trans, 1986, PWRS-1(1).

[4] Ruzic S and Rajakovic N. A New Approach for Slving Extended Unit Commitment Problem. IEEE Trans, 1991, PWRS-6(1).

[5] 陈浩勇,王锡凡. 机组组合问题的优化方法综述. 电力系统自动化. 1999, 23(4): 51～56

[6] Sheble G B, Fahd G N. Unit Commitment Literature Synopsis. IEEE Trans, 1994, PWRS-9(1): 128～135。

[7] 席少霖. 非线性最优化方法. 北京:高等教育出版社, 1992.

[8] 赵瑞安,吴方. 非线性最优化理论和方法. 杭州:浙江科技出版社, 1992.

收稿日期: 2001-05-15; **改回日期**: 2001-07-08

作者简介: 王承民(1970-),男,博士研究生,从事电力市场方向的研究; 郭志忠(1961-),男,博士生导师,教授,研究领域为电力系统稳定,电力市场,光电互感器。

Penalty function method for the thermal unit commitment

WANG Cheng-min, GUO Zhi-zhong

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Unit commitment problem is one of large-scale nonlinear and mixed integer programming for zero-one variable, it is a difficult problem. There is a new attempt to solve integer programming for zero-one variable by penalty function method. In this paper, the relaxation to zero-one variable is done and a penalty function term is added to objective function so that transform the problem to a nonlinear continue variable optimization one by taking into account more constrains including unit ramp constrain and unit constrain in time. It has been tested on a simple testing system and gives good results.

Keywords: unit commitment; nonlinear programming; penalty function method