专家讲座

小波变换

第 3 讲　二进小波变换及信号的奇异性检测

董新洲[1]，贺家李[1]，葛耀中[2]

(1. 天津大学电力系，天津　300072；2. 西安交通大学，陕西　西安　710049)

【摘要】 介绍了基于 B 样条的二进小波函数及二进小波变换的特性、算法，重点介绍了基于小波变换模极大值的信号奇异性检测理论，其要点是：信号可以通过其小波变换模极大值表示，也可通过其模极大值重构。因此，信号的表示变得异常简洁。由于二进小波变换具有平移不变性，从而在模式识别和信号的奇异性检测中获得广泛应用。

【关键词】 二进小波； 二进小波变换； B 样条； 模极大值

1　二进小波及二进小波变换

在连续小波变换中，如果只对尺度参数进行二进离散($a = 1/2^j$，$j \in Z$)而平移参数保持连续变化($b \in R$)，则小波变换取得半离散的形式

$$(W_\Psi f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)\{2^{j/2}\Psi(2^j(x-b))\}\,dx \tag{1}$$

这种小波变换被称为二进小波变换。

对应的小波函数 $\Psi(x)$ 被称为二进小波。它应满足稳定性条件[1]。

因为信号 $f(x)$ 在给定尺度下的二进小波变换是连续变量 b 的函数，因此研究二进小流变换常采用另外一种形式，它被定义为信号和小波的卷积形式

$$W_s f(x) = f * \Psi_s(x) \tag{2}$$

其中，小波 $\Psi_s(x)$ 是用尺度因子 $s\,(s = 2^j)$ 对基小波 $\Psi(x)$ 的伸缩

$$\Psi_s(x) = \frac{1}{s}\Psi\left(\frac{x}{s}\right) \tag{3}$$

此时，平移参数 b 由变量 x 取代。

二进小波变换的重要特性是具有平移不变性，可由定义看出

令　$f_\tau(x) = f(x-\tau)$

有　$(W_{2^j} f_\tau)(x) = W_{2^j}[f_\tau(x)]$

上式表明，f 的平移的二进小波变换等于它的二进小波变换的平移，$f(x)$ 具有某种性质时，则对应的 $W_{2^j} f(x)$ 也具有这种性质。

二进小波变换的另一个特性是：二进小波变换是信号的一种超完备的、冗余的表达。

同离散小波变换相比[2]，二进小波变换由于只是对尺度参数进行了离散，而平移参数仍保持连续变化，在各个尺度下小波变换仍为连续函数，因此，二进小波变换是一种超完备的表达，从而对小波函数的要求大大降低。譬如可以选择平滑函数[1]的导函数作为小波函数。

设 $\theta(x)$ 是一平滑函数，$\Psi^a(x)$ 是小波函数，且

$$\Psi^a(x) = \frac{d\theta}{dx}$$

则有　$W_{2^j} f(x) = f * \Psi_{2^j}(x) = f * \dfrac{d\theta_{2^j}(x)}{dx}$

$$= 2^{-j}\frac{d}{dx}(f * \theta_{2^j})$$

上式表明，对函数 $f(x)$ 的小波变换可表达为用平滑函数 $\theta(x)$ 对 $f(x)$ 进行平滑然后再求导。因此小波变换能够有效拟制噪声提取突变的信号。而且信号变化愈激烈，则相应的小波变换的幅值愈大。

定义　设 $W_s f(x)$ 是数 $f(x)$ 的小波变换，在尺度 S 下，在 x_0 的某一邻域 δ，对一切 x 有

$$|W_s f(x)| \le |W_s f(x_0)| \tag{4}$$

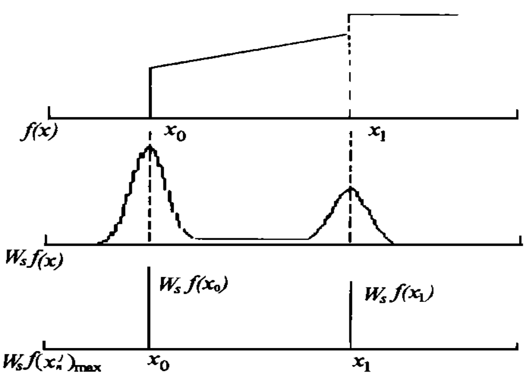


图 1　小流变换的模极大值

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

则称 x_0 为小波变换的模极大值点，$W_s f(x_0)$ 为小波变换的模极大值。

由平移不变性知：信号的尖锐变化点和其小波变换模极大值逐一对应。图 1 示出了突变信号和它的小波变换、小波变换模极大值的关系。

2 基于 B 样条的二进小波函数与尺度函数[1][3]

使用平滑函数的导函数作为小波函数，可以按照下述方法生成。

0 阶的 B - 样条是单位区间[0，1]上的特征函数，n 阶的中心 B 样条 $\beta^n(x)$ 能够由 0 阶 B 样条 $\beta^0(x)$ 反复作卷积生成

$$\beta^n(x) = \beta^0 * \beta^{n-1}(x) = \overbrace{\beta^0 * \beta^0 * \cdots * \beta^0}^{n+1} \quad (5)$$

令 $\beta^n_{2^j}(x)$ 是 $\beta^n(x)$ 的二进伸缩，即

$$\beta^n_{2^j}(x) = \frac{1}{2^j}\beta^n\left(\frac{x}{2^j}\right) \quad (6)$$

则 $\beta^n_{2^j}(x)$ 可生成一列互相嵌套的多项式样条函数空间，即多分辨分析，而 n 阶的中心 B 样条 $\beta^n_{(x)}$ 是该多分辨分析的生成元，即尺度函数。

$$\phi(x) = \beta^n(x) \quad (7)$$

若同时选择 n + 1 阶的中心 B 样条 $\beta^{n+1}(x)$ 在尺度 2^{-1} 的伸缩的导数作为小波函数，即取

$$\Psi(x) = \Psi^n(x) = \frac{\mathrm{d}\beta^{n+1}_{2^{-1}}(x)}{\mathrm{d}x} \quad (8)$$

它们满足下列二尺度方程

$$\begin{cases} \beta^n(x) = \sum h_k \beta^n(2x - k) \\ \Psi^n(x) = \sum g_k \beta^n(2x - k) \end{cases} \quad (9)$$

若记小波函数的二进对偶（重构小波）为 Ψ'，它也满足如下的二尺度方程[4]

$$\Psi'(x) = \sum k_k \beta^n(2x - k) \quad (10)$$

记序列 $\{h_k\}$，$\{g_k\}$，$\{k_k\}$ 的频域形式为 $H(\omega)$，$G(\omega)$，$K(\omega)$，则可以证明[1][3]，它们满足下列关系

$$K(\omega) = \frac{1 - H^2(\omega)}{G(\omega)} \quad (11)$$

按照上述条件构造的小波函数系数序列 $\{h_k\}$，$\{g_k\}$，$\{k_k\}$ 分别决定了尺度函数、二进小波和它的二进对偶。其数值可参照文献[4]。

3 二进小波变换的分解与重构算法

对于离散数字信号 $\{d_n\}_{n\in Z}$，其二进小波变换也应是离散的形式。

若令 $d_n = f * \phi(n) = f * \beta^n(n)$

并记 $S_{2^j} f = f * \beta^n_{2^j}$

则离散二进小波变换的分解与重构算法可写成

分解算法

$$\begin{cases} S_{2^j} f(n) = \sum_k h_k S_{2^{j-1}} f(n - 2^{j-1}k) \\ W_{2^j} f(n) = \sum_k g_k S_{2^{j-1}} f(n - 2^{j-1}k) \end{cases} \quad j \in [1, \infty] \quad (12)$$

实际上的小波分解是有限步的，因此 $j \in [1, J - 1]$。

重构算法

$$S_{2^{j-1}} f(n) = \sum_l \bar{h}_{-l} S_{2^j} f(n - 2^{j-1} l) + k_l S_{2^{j-1}} f(n - 2^{j-1} l) \quad (13)$$

4 信号的小波变换模极大值表示及奇异性检测理论[1][5]

若函数 $f(x)$ $(f(x) \in R)$ 在某处间断或某阶导数不连续，则称该函数在此处有奇异性；若函数 $f(x)$ 在其定义域有无限次导数，则称 $f(x)$ 是光滑的或没有奇异性。一个突变的信号在其突变点必然是奇异的。检测和识别信号的突变点并用奇异性指数 lipischitz α 来刻划它就是信号的奇异性检测理论。

一个函数（或信号）$f(x) \in R$ 在某点的奇异性常用其奇异性指数 lipischitz α 来刻划。

定义 设 $0 \le \alpha \le 1$，在点 x_0，若存在常数 K，对 x_0 的邻域 x 使得下式成立

$$|f(x) - f(x_0)| \le K |x - x_0|^{\alpha} \quad (14)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是 Lipschitz α；

如果 $\alpha = 1$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 是可微的，称函数 $f(x)$ 没有奇异性；如果 $\alpha = 0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 间断。α 越大，说明奇异函数 $f(x)$ 越接近规则；α 越小，说明奇异函数 $f(x)$ 在 x_0 点变化越尖锐。

函数（或信号）的奇异性可用其 lipischitz α 来刻划，其数值可通过小波变换模大值在不同尺度的数值计算出来。

函数 $f(x) \in L^2(R)$ 与它的小波变换满足如下关系

$$|W_s f(x)| \le K(2^j)^{\alpha} \quad (15)$$

当 s 取为 2^j 且 $W_{2^j} f(x_0)$ 是小波变换模大值时，从式(6)可得

$$W_{2^j} f(x_0) = K(2^j)^{\alpha} \quad (16)$$

从而 lipischitz α 可由下式来计算

$$\alpha = \log_2 \frac{W_{2^{M+1}} f(x_0)}{W_{2^M} f(x_0)} \qquad M \in Z \quad (17)$$

信号的奇异性检测理论给出了具有突变性质的

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

信号在何时发生突变以及变化剧烈程度的数学描述,即小波变换模极大值表示。这正是其它数学方法难以做到的。

5　利用小波变换模极大值重构原信号

信号的奇异点包含着信号中最重要的信息。小波变换的模极大值能够刻划信号的奇异点和奇异性,而且可以由其小波变换模极大值重构原信号[5]。设信号 $f(x)$ 在尺度 j 和点 $\{x_n^j\}$ 取得模极大值 $\{W_{2^j}f(x_n^j)\}$,小波变换模极大值重构原信号思想如下:

(1) 构造小波变换 $W_{2^j}f(x)$;

(2) 构造函数 $h(x)$,它和 $f(x)$ 有相同的模极大值

$$W_{2^j}f(x_n^j) = W_{2^j}h(x_n^j)$$

(3) 构造 $h(x)$ 的小波变换 $W_{2^j}h(x)$。可令 $g_j(x)$ 是逼近二进小波变换 $W_{2^j}f(x)$ 的函数序列,且满足

$$g_j(x_n^j) = W_{2^j}f(x_n^j)$$

(4) 构造 $g_j(x)$:

①令 $\varepsilon_j(x) = h_j(x) - g_j(x)$,并使 $\|\varepsilon_j(x)\|^2 + 2^{2j}\left\|\frac{d\varepsilon_j}{dx}\right\|^2$ 最小。其解为 $\varepsilon_j(x) = \alpha e^{2^{-j}x} + \beta e^{-2^{-j}x}$,其中系数 α,β 由边界条件确定

$$\varepsilon_j(x_0) = W_{2^j}f(x_0) - g_j(x_0) \tag{18}$$

$$\varepsilon_j(x_1) = W_{2^j}f(x_1) - g_j(x_1) \tag{19}$$

x_0, x_1 是 $W_{2^j}f(x)$ 的两个相邻小波变换模极大值点。

②为了重构稳定,对 $g_j(x)$ 作符号约束[5]则得到 $h_j(x)$;

③由 $h_j(x)$ 重构 $h(x)$ 又得到 $g_j(x)$,由式(18)、(19)可求得新的 $\varepsilon_j(x)$ 和 $g_j(x)$;

④重复上述过程,使得 $\varepsilon_j(x)$ 足够小。最后得到的 $g_j(x)$ 或 $h_j(x)$ 即为待求的小波变换 $W_{2^j}h(x)$,进而可得到 $h(x) \approx f(x)$。

图 2 对照示出了信号和由它的小波变换模极大值重构的信号,其中上述逼近过程重复了 20 次[5]。

6　二进小波变换的应用

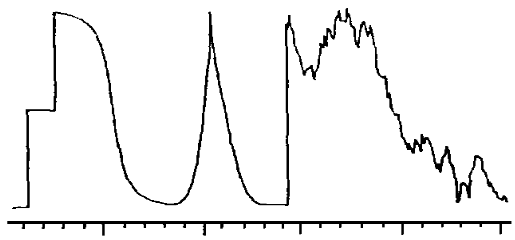
由于二进小波变换具有平移不变性,其模极大值可用来表示和重构信号。因此,二进小波变换特别适用于模式识别和信号检测。以下简介它在电力系统两方面的应用。

(1) 故障检测[6][7]

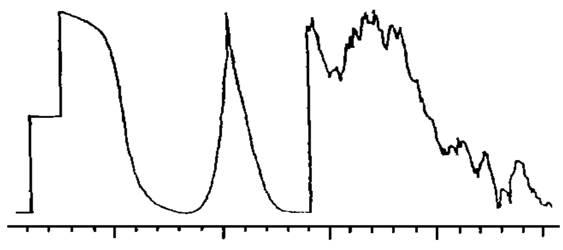
电力系统发生故障以后,各种电气量(电流、电压、阻抗、功率、功角等)都将发生剧烈变化,从信号的角度来看,它们都是突变信号,正是这些突变信号中包含着丰富的故障信息。继电保护的任务就是检测故障信息、识别故障信号,进而作出保护是否出口跳闸的决定。小波变换的引入,将有助于利用故障分量或突变量的继电保护技术的发展。

(2) 行波检测和识别[4][7][8]

行波信号的小波变换呈现模极大值,提取和识别这些模极大值,将极大改变行波保护和故障测距的面貌。根据小波变换的模极大值理论,行波信号还可以通过它的小波变换模极大值重构。因此,利用模极大值进行行波数据的压缩(用于存储和通信)也是一个非常有意义的课题。



(a) 原始信号



(b) 由模极大值重构的信号

图 2　原始信号和由其二进小波变换模极大值重构信号的对照

7　结论

(1) 二进小波变换的主要特点是具有平移不变性;

(2) 奇异信号的二进小波变换呈现模极大值,模极大值可以完备表达和重构奇异信号;

(3) 奇异信号的奇异性可由奇异指数 lipischitz α 刻划,并由其二进小波变换模极大值计算;

(4) 二进小波变换是电力系统故障分析和故障

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

检测的有力工具,将在电工学科诸领域获得广泛应用。

[参考文献]

[1] Mallat S and Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Trans on Information Theory,1992,38.

[2] 崔锦泰[美]著,程正兴译. 小波分析导论. 西安:西安交通大学出版社,1996.

[3] 王玉平,龙公,蔡元龙. 多尺度B样条小波边缘检测算子. 中国科学A辑,1995,25.

[4] 董新洲. 小波理论应用于输电线路故障测距研究. 博士学位论文,西安交通大学,1996.

[5] Mallat S and Zhong S. Wavelet transform maxima and multiscale edges, in wavelet and their applications, Beykin G. leds, Jones and Baftlett, Cambridge, MA, 1991.

[6] 王玉红,任震,黄雯莹. 离散小波变换及其在电机故障诊断中的应用. 电力系统自动化,1995,(10).

[7] 董新洲,耿中行,葛耀中,张伏生,徐丙垠. 小波变换应用于电力系统故障信号分析初探. 中国电机工程学报,1997,(6).

[8] 董新洲,贺家李,葛耀中. 小波变换在行波故障检测中的应用. 继电器,1998,(5).

收稿日期:1998—10—22

作者简介:董新洲(1963-),男,博士,主要从事行波保护、行波测距以及小波变换在电力系统中的应用等研究; 贺家李(1925-),男,教授,博士生导师,长期从事电力系统故障分析、继电保护领域的科学研究; 葛耀中(1930-),男,教授,博士生导师,长期从事电力系统继电保护基础理论与应用的研究。

WAVELET TRANSFORM(PART THREE)

DYADIC WAVELET TRANSFORM AND SIGNAL SINGULARITY DETECTION

DONG Xin-zhou[1], *HE Jia-Li*[1], *GE Yao-zhong*[2]

(1. Power Department of Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049, China)

Abstract The property and algorithm of dyadic wavelet function and dyadic wavelet transform basing on B spline are introduced. Specially the theory of signal singularity detection basing on modulus maxima of wavelet transform is described. Its key point is that, the signal can be represented by the modulus maxima of wavelet transform and also can be reconsrtucted by the modulus maxima. Thus, signal representation becomes very clear. Because the dyadic wavelet transform possess translational invariability, it is widely used in mode identification and signal sigularity detection.

Keywords dyadic wavelet; dyadic wavelet transform; B spline; modulus maxima

(上接第64页)件,易损坏工件或设备。

在实际的焊接过程中,应综合考虑各方面的因素,相互配合调整以上各参数,方能获得满意的焊接效果。

7 结论

塑料零件的超声波铆接装配工艺,操作简单,生产效率高,质量好,生产成本低,适于大批量的工业化生产。许多传统的装配组合方式,都可以用超声波铆接工艺来实现。

收稿日期:1998—11—12

作者简介:蔡惠卿(1965-),男,大学本科,工程师,从事塑料成形工艺设计工作。

APPLICATION OF PLASTIC PARTS ULTRASONIC RIVETED JOINT ASSEMBLY PROCESS

CAI Hui-qing

(XJ Electric Corporation, Xuchang 461000, China)

Abstract The principle and application case of plastic ultrasonic welding technology are briefly introduced in this paper. The designing of shape and dimension of welded parts, the determining of welding parameter, the designing of horn and welding fixture, are discussed in detail. Ultrasonic riveted joint process possess the characteristics of operating simple, low costing, high efficiency, suitable for great batch industrial producing.

Keywords ultrasonic; welding; riveted joint; plastics parts; welding area; connection assembly

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net