

小波变换

第2讲 离散小波变换

董新洲 贺家李 天津大学电力系 (300072)

葛耀中 西安交通大学电力系 (710049)

【摘要】围绕离散小波变换讨论了多分辨分析、尺度函数的概念,介绍了离散小波变换的分解与重构算法——Mallat算法,同时探讨了离散小波变换在电力系统可能的应用。

【关键词】小波 对偶小波 离散小波变换 多分辨分析 尺度函数

1 离散小波与离散小波变换

连续小波及连续小波变换对于小波思想的建立是有效的,但在实际应用中,考虑到计算的有效性,常常要对小波及其变换进行离散,离散小波族被写为

$$\Psi_{j,k} = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k), \quad j, k \in Z \quad (1)$$

显然, $\Psi_{j,k}(t)$ 是由单一函数 $\Psi(t)$ 通过二进膨胀(即 2^{-j} 的膨胀)和二进平移(即 $k/2^j$ 的膨胀)得来。相应地,离散小波变换被写成

$$(W_{\Psi} f)\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{2^{j/2} \Psi(2^j t - k)\} dt = \sum_{j,k} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \quad (2)$$

通过选择小波函数 Ψ ,使得它的对偶 $\tilde{\Psi}$ 存在,则由离散小波变换重构原信号的公式为

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \tilde{\Psi}_{j,k} \quad (3)$$

由文献^[1]知,若小波函数 Ψ 是 R 小波,则 Ψ 的对偶一定存在。 R 小波按定义可分为以下三类:

定义:

(1) Ψ 称为是一个正交小波,如果 $\{\Psi_{j,k}\}$ 满足正交性条件

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}, \quad j, k, l, m \in Z \quad (4)$$

(2) Ψ 称为是一个半正交小波,如果 $\{\Psi_{j,k}\}$ 满足条件

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = 0, \quad j \neq l, j, k, l, m \in Z \quad (5)$$

(3) Ψ 称为是一个双正交小波(或非正交小波),如果 Ψ 的对偶存在,且满足条件

$$\langle \Psi_{j,k}, \tilde{\Psi}_{l,m} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}, \quad j, k, l, m \in Z \quad (6)$$

2 多分辨与尺度函数

为了便于表达,需要使用一些泛函分析的知识^[2]。

2.1 多分辨分析

定义 多分辨分析是一列闭子空间 $\{V_j\}_{j \in Z}$, 它满足条件:

(1) 单调性: $\dots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$

(2) V_j 在 L^2 中的并是稠密的: $\text{clos}_{L^2(R)}(\bigcup_{j \in Z} V_j) = L^2(R)$, 交是零: $\bigcap_{j \in Z} V_j = 0$

(3) 伸缩规则性: $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$

(4) Riesz 基存在性: 存在函数 $\varphi(t) \in V_0$, 使得 $\{\varphi(t-k), k \in Z\}$ 是 V_0 的 Riesz 基

(5) 平移不变性:

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(t + \frac{1}{2^j}\right) \in V_j$$

根据多分辨分析,可以建立起另外两个重要的概念:

(1) 尺度函数

称函数 $\varphi(t)$ 为尺度函数,它的伸缩和平移系 $\varphi_{j,k}$ 能够生成闭子空间 $\{V_j\}_{j \in Z}$, 即多分辨分析

$$V_j = \text{clos}_{L^2(R)} \langle \varphi_{j,k}, j, k \in Z \rangle$$

其中 $\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$

(2) 小波空间

若空间 $\{W_j\}$ 与空间 $\{V_j\}$ 满足: $V_{j+1} = W_j \dot{+} V_j, j \in Z$, 称子空间 W_j 是子空间 V_j 的补子空间,它由小波函数 $\Psi(t) \in W_0$ 生成,称为小波空间。

$$W_j = \text{clos}_{L^2(R)} \langle \Psi_{j,k}, j, k \in Z \rangle$$

有了小波空间 $W_j, L^2(R)$ 可分解为 W_j 的直接和

$$L^2(R) = \sum_{j \in Z} W_j = \dots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} \dots \quad (7)$$

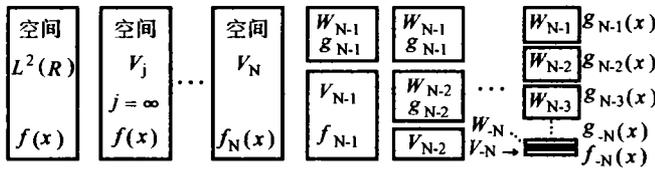


图1 多分辨分析和小波空间的图形表示

为帮助理解有关空间概念,可参照如下的图形(图1)表示(它是不严格的)。

2.2 尺度函数和小波函数的二尺度方程

由上述知: \$\varphi \in V_0\$ 也属于 \$V_1, \Psi \in W_0\$ 也属于 \$V_1\$, 因此, 空间 \$V_1\$ 的基 \$\varphi(2t)\$ 必然与空间 \$V_0\$ 的基 \$\varphi(t)\$ 和空间 \$W_0\$ 的基 \$\Psi(t)\$ 有关。亦即存在序列 \$\{p_k\}, \{q_k\}\$ 使得下式成立

$$\begin{cases} \varphi(t) = \sum_k p_k \varphi(2t - k) \\ \Psi(t) = \sum_k q_k \varphi(2t - k) \end{cases} \quad (8)$$

并且分别被称为尺度函数和小波函数的二尺度方程。

又设尺度函数 \$\varphi\$ 和小波函数 \$\Psi\$ 的对偶为 \$\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}\$, 则 \$\tilde{\varphi}\$ 和 \$\tilde{\Psi}\$ 也满足二尺度方程

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(t) = \sum_k \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \\ \tilde{\Psi}(t) = \sum_k \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \end{cases} \quad (9)$$

既然 \$\tilde{\varphi}\$ 和 \$\tilde{\Psi}\$ 是 \$\varphi\$ 和 \$\Psi\$ 的对偶, 因此四个二尺度序列是相关的。可以证明^[1]: 由序列 \$\{p_k\}, \{q_k\}\$ 可以派生出序列 \$\{h_k\}, \{g_k\}\$, 进而得到序列 \$\{\tilde{h}_k\}, \{\tilde{g}_k\}\$。

它们是建立小波分解与重构算法的根据。

3 Mallat 算法

如前所述, 由于 \$L^2(R)\$ 可分解为空间 \$W_j\$ 的直接和, 而 \$g_j(t) \in W_j\$, 因此对于 \$f(t) \in L^2\$ 都有小波分解

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(t) = \dots + g_{-1}(t) + g_0(t) + g_1(t) + \dots, \quad (10)$$

因为 \$W_j\$ 是 \$V_j\$ 的补空间, 而 \$g_j(t) \in W_j \in V_{j+1}, f_j(t) \in V_j \in V_{j+1}\$, 所以

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + g_j(t)$$

在不同尺度下的逼近分量和小波分量可由函数 \$\varphi\$ 和 \$\Psi\$ 表示为

$$f_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j \varphi(2^j t - k) \quad (11)$$

$$g_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \Psi(2^j t - k) \quad (12)$$

于是, 对信号的分解完全由系数序列 \$\{c_k^j\}\$ 和 \$\{d_k^j\}\$ 确定。其中 \$\{d_k^j\}\$ 是使用 \$\tilde{\Psi}\$ 作为基小波时的离散小波变换的值, 而且式(8)中的分解是数据相关的。即 \$C_{j,k}\$ 和 \$d_{j,k}\$ 可由 \$C_{j+1,k}\$ 求出, \$C_{j,k}\$ 和 \$d_{j,k}\$ 可合成 \$C_{j+1,k}\$。

对于固定的 \$j\$, 由 \$C_{j+1,k}\$ 求 \$C_{j,k}\$ 和 \$d_{j,k}\$ 的算法称为分解算法; 由 \$C_{j,k}\$ 和 \$d_{j,k}\$ 求 \$C_{j+1,k}\$ 的算法称为重构算法。小波分解与重构算法由 Mallat^[3] 提出, 故又称为 Mallat 算法。

分解算法

$$\begin{cases} C_{j,k} = \sum_l \alpha_{l-2k} C_{j+1,l} \\ d_{j,k} = \sum_l \beta_{l-2k} C_{j+1,l} \end{cases} \quad (13)$$

其中: \$\alpha_k = \frac{1}{2} g_{-k}, \beta_k = \frac{1}{2} h_{k,0}\$

重构算法

$$C_{j+1,k} = \sum_l (P_{k-2l} C_{j,l} + q_{k-2l} d_{j,l}) \quad (14)$$

小波分解过程和重构过程如图2所示

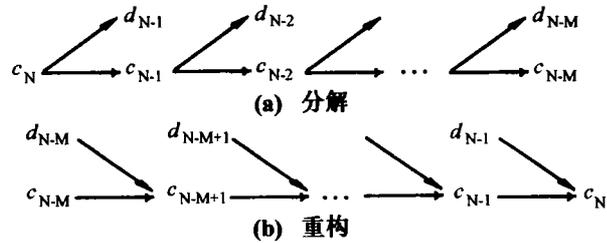


图2 小波分解和重构过程

由式(12)知: 小波变换对于一个信号的分解过程实际上就是把信号表示成为小波分量的过程, Mallat 算法的重要价值就在于揭示了这种分解过程中各个分量(或系数)之间的联系。

需要说明的是, 不论采用哪种小波, 正交的、半正交的或非正交的, 其算法都是一样的。仅仅是系数 \$\{a_k\}, \{b_k\}\$ 和 \$\{p_k\}, \{q_k\}\$ 不同。

4 R 小波的系数特点

二尺度方程建立了尺度函数和小波函数与序列 \$\{p_k\}, \{q_k\}\$ 之间的对应关系: 一对序列 \$\{p_k\}, \{q_k\}\$ 唯一地决定了一对尺度函数和小波函数。因此, 对不同小波的研究和应用, 都可归结为对其系数的研究。

由于尺度函数 \$\varphi\$ 生成闭子空间 \$\{V_j\}\$, 要求 \$\Psi\$ 生

成空间 $\{V_j\}$ 的补空间 $\{W_j\}$, 而且二者构成直接和。因此确定函数 φ 和 Ψ 的二尺度序列 $\{p_k\}, \{q_k\}$ 之间必定有一些约束和限制。

以下仅给出三类 R 小波系数序列的特点^[4]。

(1) 正交小波

正交小波是自对偶的, 因此 $\Psi = \tilde{\Psi}$ 。此时的四个序列 $\{p_k\}, \{q_k\}, \{\tilde{p}_k\}, \{\tilde{q}_k\}$, 仅由一个序列 $\{p_k\}$ 生成

$$\{q_k\} = \{(-1)^k \tilde{p}_{1-k}\} \quad (15)$$

正交小波的一个例子是二阶的 Daubechies 小波。图 3(a)、(b) 示出了尺度函数和小波函数的图形。

(2) 半正交小波

半正交小波是以样条函数为基础构造的^[1]。它的尺度函数选择 m 阶基数 B 样条, 小波函数选择为 $2m$ 阶基本基数样条函数的 m 阶导数, 对应的系数序列为

$$p_{m,k} = \begin{cases} 2^{-m+1} \binom{m}{k}, & 0 \leq k \leq m \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (16)$$

$$q_{m,k} = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l), & 0 \leq k \leq 3m-2 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (17)$$

其中的下标 m 表示样条函数的阶数。对偶尺度函数和对偶小波函数的系数序列 $\{\tilde{p}_k\}, \{\tilde{q}_k\}$ 由 $\{p_k\}, \{q_k\}$ 导出^[1]。图 3(c)、(d) 示出了二次样条小波和次样条小波三的图形。

对于半正交小波, 只要给出样条函数的阶数 m , 则四个序列 $\{p_k\}, \{q_k\}, \{\tilde{p}_k\}, \{\tilde{q}_k\}$ 就被决定。

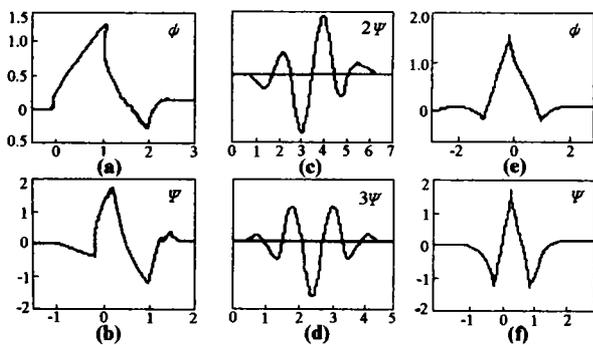


图3 小波函数的图形

(a)、(b) 二阶 Daubechies 尺度函数与小波; (c)、(d) 二次和三次样条小波; (e)、(f) Burt φ, Ψ

(3) 双正交小波

双正交小波四个系数序列 $\{p_k\}, \{q_k\}, \{\tilde{p}_k\},$

$\{\tilde{q}_k\}$ 由两个系数序列 $\{p_k\}, \{\tilde{p}_k\}$ 生成

$$\begin{cases} q_k = (-1)^{k-1} \tilde{p}_{-k+1} \\ \tilde{q}_k = (-1)^{k-1} p_{-k+1} \end{cases} \quad (18)$$

对于双正交小波, 必须独立地给出系数序列 $\{p_k\}, \{\tilde{p}_k\}$ 。图 3(e)、(f) 示出了 Burt - Adelson 构造的双正交小波和尺度函数的图形。

在前述三类小波中, 正交小波是信号 $f(t)$ 小波表示的最简洁形式, 但正交小波缺乏对称性, 而对称性是保证由小波变换重构原信号不失真的前提条件^[1]。

基于此, 具有对称性和反对称性的半正交小波和双正交小波^[4] 获得了广泛应用。

5 离散小波变换的应用

综上所述, 对一个信号施行小波变换的过程就是对信号进行小波分解的过程, 而逆变换就是重构原信号的过程。对于给定的信号和选定的小波(系数确定), 我们可以象使用 FFT 进行 Fourier 变换一样, 直接使用 Mallat 算法对信号进行小波分析。

以下简介离散小波变换在电力系统中的两个应用。

(1) 数据压缩

电力质量监视器, 行波保护和行波故障测距装置的共同特点是对于电压电流信号的采样频率很高(达数兆 Hz), 需要记录、存贮和传送的数据量巨大。因而迫切需要数据压缩。小波变换可以达到这一目的。

如前所述, 信号可分解为小波分量, 各个分量可以通过互相相关的关系序列 $\{C_k^j\}$ 和 $\{d_k^j\}$ 来计算。系数序列的特点是每每减半^[3], 而整个分解过程记录的系数序列长度之和仍等于原始信号长度。此时保留与特定信号有关的系数, 去除无关的系数, 则数据量将大大减少^[5](约为原信号的 1/6~1/3), 从压缩的数据中, 原信号可以重构, 而丢失的信息很少。

(2) 滤波

小波变换能够按频带分解信号, 因此可用于滤波, 包括从含有衰减非周期分量的故障电流中提取工频分量^[6]、谐波检测^[7]和电压波形畸变检测等。

设原始信号的频带为 $(0, \Omega)$, 第一次的小波分解把这个信号分解成高频 $(0, \Omega/2)$ 和低频 $(\Omega/2, \Omega)$ 两个部分; 第二次的小波分解把低频信号分解成高频 $(0, \Omega/4)$ 和低频 $(\Omega/4, \Omega/2)$ 两个部分; 依次类推, 直到把信号分解完毕。若要对高频再进行分解, 则

可以使用小波包方法^[1]。这里不予讨论。

6 结论

(1)本文讨论的离散小波变换是指对尺度参数和平移参数都进行二进离散的特定形式;

(2)离散小波变换是连续小波变换的一种数字化、具体化形式;

(3)R小波是离散小波变换的核心;

(4)多分辨分析奠定了小波函数的构造和 Mallat 算法的基础;

(5)Mallat 算法在离散小波变换中的地位相当于 FFT 在 Fourier 变换中的地位。

参考文献

- 1 崔锦泰[美]著,程正兴译.小波分析导论.西安:西安交通大学出版社,1996.
- 2 龚怀云,寿纪麟,王绵森.应用泛函分析.西安:西安交通大学出版社,1985.
3. Mallat S. A theory of multi-resolution signal decomposition:

the wavelet representation, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989,11.

- 4 程正兴.小波分析算法与应用.西安:西安交通大学出版社,1998.
5. Santoso S, Powers E J, Grady W M. Power quality disturbance data compression using wavelet transform, IEEE Trans. On power Deliver. 1997,12(3).
- 6 董新洲,耿中行,葛耀中,张伏生,徐丙垠.小波变换应用于电力系统故障信号分析初探.中国电机工程学报,1997.6.
- 7 杨华,任震,唐卓尧.基于小波变换检测谐波的新方法.电力系统自动化,1997,21(10).

收稿日期:1998—11—06

董新洲 男,1963年生,副教授,博士后,从事行波保护,行波测距及小波变换在电力系统中的应用研究。

贺家李 男,1925年生,教授,博导,长期从事电力系统故障分析、继电保护领域的研究工作。

葛耀中 男,1930年生,教授,博导,长期从事电力系统继电保护基础理论与应用的研究。

WAVELET TRANSFORM(PART TWO)DISPERSIVE WAVELET TRANSFORM

Dong Xinzhou, He JiaLi (Tianjin University, Tianjin, China, 300072)

Ge YaoZhong (Xi'an Jiaotong University, 710049, China)

Abstract This paper discusses the concept of multi-resolution analysis and scale function basing on dispersive wavelet transform, introduces the decomposition and reconstruction algorithm(Mallat algorithm)of the dispersive wavelet transform, meanwhile, discusses the application of the dispersive wavelet transform in power system.

Keywords Wavelet Dual wavelet Dispersive wavelet transform Multi-resolution analysis Scale function

(上接 56 页)

4 结论

就该厂出现的接地装置误动这一异常情况,我们必须引起足够重视。在检修时,要对电缆接地线、接地情况、电缆头与支架的绝缘等认真检查。另外,还要注意两点①做电缆线盒时,要严格按工艺要求进行,焊电缆接地线时,一定要清抹铅包后,在钢带断处的铅包及钢带交接处,将软铜线或铜编织带焊接牢固,否则,流入零序电流互感器的电流不能全部流出,可能使接地继电器误动。

②因零序电流互感器的二次电流较小(mA),一方面要求二次回路线径较粗,另一方面,校验继电器时,希望实地校验,即在线路停电状态下,给零序互感器通入一次整定电流,调整继电器使之动作。否则,在试验室由于模拟的线路电阻不准确,所校的继电器误差就会大,不能反映实际情况。

收稿日期:1998—07—02

李志勇 男,1953年生,本科,工程师,主要从事电气检修工作。

ANALYSIS ON MALOPERATION CAUSE OF THE EARTHING

DEVICE FOR #1 PLANT FEEDER

Li Zhiyong (Thermal Power Plant of Jiaozuo Mining Bureau, 454191, Jiaozuo, China)

Abstract This paper introduces maloperation of the #1 plant feeder earthing device in thermal power plant of Jiaozuo mining bureau in April 1998 and analyzes cause of the maloperation.

Keywords Earthing device Feeder Maloperation Analysis