专家讲座

小波变换

第 1 讲　基本概念

董新洲　贺家李　天津大学电力系　(300072)
葛耀中　西安交通大学电力系　(710049)

【摘要】 从信号处理及工程应用的角度出发,介绍了小波及小波变换的常用数学术语、基本概念以及小波变换的时频局部化特性,说明了小波变换是分析非平稳变化信号的理想工具,为进一步了解小波变换和进行工程应用奠定了基础。

【关键词】 小波　小波变换　时频局部化

1　引言

在信号分析中,变换就是寻求对于信号的另外一种表示,使得比较复杂的、特征不够明确的信号在变换后的形式下变得简洁和特征明确。

信号有两类:一类是稳定变化的信号;一类是具有突变性质的、非稳定变化的信号。

对于稳定变化的信号,工程上最常使用的一种变换就是 Fourier 变换。Fourier 变换把一个周期变化的信号表示成一族具有不同频率的正弦波的线形叠加。从数学上讲,Fourier 变换是通过一个被称为基函数的函数 $w(x) = e^{ix}$ 的整数膨胀而生成任意一个周期平方可积函数 $f(x) \in L^2(0,2\pi)$,其中 $L^2(0,2\pi)$ 称为平方可积函数空间。通过 Fourier 变换,在时域中连续变化的信号转化为频域中的信号,因此 Fourier 变换是一种纯频域分析方法。

对于具有突变性质的、非稳定变化的信号,人们不只感兴趣该信号的频率,而且尤其关心该信号在不同时刻的频率,换句话说,需要时间和频率两个指标来刻划信号。显然,Fourier 变换是无能为力的。这是因为:Fourier 变换在频域上是完全局部化了的(能把信号分解到每个频率细节),但在时域上却没有任何分辨能力。因此需要时频分析方法来分析这种信号。

时频分析方法的典型例子是窗口 Fourier 变换。一个具有有限能量的模拟信号 $f(t)$ 的窗口 Fourier 变换被定义为

$$G(\omega,\tau) = \int f(t)\, g(t-\tau)\, e^{-i\omega t} dt \qquad (1)$$

其中,$g(t)$ 是具有紧支集的时限函数。显然,窗口 Fourier 变换和 Fourier 变换的区别就是前者多了一个时限函数 $g(t)$。

从式(1)中去掉 $g(t-\tau)$,则上式就是 Fourier 变换。因此窗口 Fourier 变换可描述为:对于待分析的信号 $f(t)$ 先开窗再做 Fourier 变换,随着窗的移动,$f(t)$ 被一部分一部分地分解。其中的时限函数 $g(t)$ 因此被称为窗函数[1]。

由式(1)可见,$G(\omega,\tau)$ 既是频率 ω 的函数,又是时间 τ 的函数,因此窗口 Fourier 变换提供了信号 $f(t)$ 在时间 τ 的频率信息,它是一种时频分析方法。

实际信号是由多种频率分量组成的,当信号尖锐变化时,需要有一个短的时间窗为其提供更多的频率信息;当信号变化平缓时,需要一个长的时间窗用于描述信号的整体行为。换句话说,希望能有一个灵活可变的时间窗。而窗口 Fourier 变换无法做到这一点。这是因为窗口 Fourier 变换的窗函数 $g(t)$ 的大小和形状是固定不变的,不能适应不同频率分量信号的变化。这就导致了小波变换的出现。

2　连续小波变换

受 Fourier 变换和窗口 Fourier 变换的启发,可以寻找另外一个单一函数的膨胀和平移来表示信号 $f(t)$,这样的函数被称为基小波 $\Psi(t)$,它必须满足容许性条件

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{-1} |\hat{\Psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty \qquad (2)$$

或者等价地

$$\int \Psi(t)\, dt = 0 \qquad (3)$$

由基小波的伸缩和平移所生成的函数族 $\Psi_{a,b}(t)$ 被称为连续小波

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right),\quad a, b \in R,\ a \neq 0 \qquad (4)$$

其中:a 称为尺度因子,b 称为平移因子。

信号 $f(t) \in L^2(R)$ ($L^2(R)$ 又被称为能量有限信号空间[2]) 关于小波 $\Psi_{a,b}(t)$ 的连续小波变换被定义为

$$(W_\Psi f)(a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\, \mathrm{d}t \qquad (5)$$

或者写成内积形式[2]

$$(W_\Psi f)(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle \qquad (6)$$

信号 $f(t)$ 可以由它的小波变换重构,重构公式为

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\Psi f)(a,b)\, \Psi_{a,b} \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \mathrm{d}b \qquad (7)$$

同样的函数 $|a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 除了复共扼以外,被用于小波变换和逆变换,因此 $\overline{\Psi}$ 称为 Ψ 的一个对偶。

根据小波变换的定义,可以看出它和 Fourier 变换的异同:

①小波变换和 Fourier 变换都是使用一个被称为基函数的单一函数 $\Psi(t)$ 和 e^{it} 来表示原信号;

②小波变换是用尺度因子 a 对基小波 $\Psi(t)$ 进行伸缩,Fourier 变换是用膨胀因子 ω 对基函数 e^{it} 进行伸缩;

③小波变换还用平移参数 b 对基小波进行平移,而 Fourier 变换只有伸缩没有平移,因此小波变换具有时频局部化性能,而 Fourier 变换是一种纯粹的频域分析法;

作为时频分析方法,小波变换和窗口 Fourier 变换都能给出信号在某一时刻的频率信息,但两者有本质的差别,可以通过下述看出。

3 小波变换的时频局部化性能

为了说明小波变换的时频局部化性能,首先给出窗函数的定义。

定义 1 非平凡函数 $w(t)$ 被称为是一个窗函数:如果 $w(t) \in L^2(R)$,且 $tw(t) \in L^2(R)$。表征窗函数的两个参数是窗函数的中心与半径[3].

设基小波 $\Psi(t)$ 及其 Fourier 变换 $\hat{\Psi}(w)$ 都是窗函数,其中心与半径分别为 $t^*, \omega^*, \Delta_\Psi, \Delta_{\hat{\Psi}}$,则小波函数 $\Psi_{a,b}$ 和它的 Fourier 变换 $\hat{\Psi}_{a,b}(\omega)$ 也是窗函数,它们一起在时间—频率平面上定义了一个矩形窗(时频窗)

$$(b + at^* - a\Delta_\Psi, b + at^* + a\Delta_\Psi) \times \left(\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\Psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\Psi}}\right) \qquad (8)$$

其中心在 $\left(b + at^*, \frac{\omega^*}{a}\right)$,窗的高度(频窗)和宽度(时窗)分别为 $2\frac{1}{a}\Delta_{\hat{\Psi}}, 2a\Delta_\Psi$。

窗函数决定的窗口是对信号 $f(t)$ 局部性的一次刻化,小波窗函数提供了信号 $f(t)$ 在时段 $(b + at^* - a\Delta_\Psi, b + at^* + a\Delta_\Psi)$ 和频带 $\left(\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\Psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\Psi}}\right)$ 时的"含量"。因此,小波变换具有时频局部化性能。

另外,由式(4)知,小波窗函数的窗口形状是变化的。对于高频信号,时窗变窄,频窗变宽,有利于描述信号的细节;对于低频信号,时窗变宽,频窗变窄,有利于描述信号的整体行为。正是由于小波函数的这种变窗特性,使它能够表示各种不同频率分量的信号,特别是具有突变性质的信号。

窗口 Fourier 变换不同于小波变换。

设窗口 Fourier 变换的时限函数 $g(t)$ 和它的 Fourier 变换 $\hat{g}(\omega)$ 都是窗函数,其中心与半径分别为 $t^*, \omega^*, \Delta_g, \Delta_{\hat{g}}$。若令

$$w_{\omega,\tau} = e^{i\omega t} g(t - \tau)$$

则 $w_{\omega,\tau}$ 和它的 Fourier 变换 $\hat{w}_{\omega,\tau}$ 也是窗函数,它们也定义了一个时频窗

$$(t^* + \tau - \Delta_g, t^* + \tau + \Delta_g) \times (\omega^* + \omega - \Delta_{\hat{g}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\hat{g}}) \qquad (9)$$

由上式可见,除了时间上的移动(τ)和频率范围(ω)的变化外,窗口的大小和形状是不变的。因此,窗口 Fourier 变换不能适应不同频率信号的变化。但在实际中,为了检测高频信号,必须选择足够窄的时间窗,而在检测低频信号时,必须选择足够宽的时间窗,这个矛盾在窗口 Fourier 变换中是无法解决的。而这正是小波变换的优点。

4 两类重要的小波变换

连续小波变换 $(W_\Psi f)(a,b)$ 是信号 $f(t)$ 的一种表示,在这里,参数 a, b 取遍整个实轴。若对参数 a, b 的取值作一些限制,则有不同类的小波变换[3]。常用的小波变换有两类:离散小波变换[3] 和二进小波变换[4]。

(1) 离散小波变换

取 $a = \frac{1}{2^j}, b = \frac{k}{2^j}; j, k \in Z$。即尺度参数 a 使用

2 的幂把频率轴剖分为二进的、相互毗邻的频带，同时，平移参数 b 只在时间轴上的二进位值取值。此时，式(5) 的连续小波变换转换为离散的小波变换

$$(W_\Psi f)\left(\frac{1}{2^j},\frac{k}{2^j}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{[2^{j/2}\Psi(2^j t - k)]}\,\mathrm{d}t \quad (10)$$

$\Psi_{j,k}$ 就是小波函数，它被写成

$$\Psi_{j,k} = 2^{j/2}\Psi(2^j t - k),\quad j,k \in Z \quad (11)$$

(2) 二进小波变换

取 $a = \frac{1}{2^j}, j \in Z; b \in R$。即只对尺度参数 a 进行二进离散，而平移参数 b 保持连续变化。此时，式(5) 的连续小波变换转换为半离散的小波变换或者称为二进小波变换

$$(W_\Psi f)\left(\frac{1}{2^j},b\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{\{2^{j/2}\Psi[2^j(t-b)]\}}\,\mathrm{d}t \quad (12)$$

小波函数 $\Psi_{j,b}$ 被写成

$$\Psi_{j,b} = 2^{j/2}\Psi[2^j(t-b)],\quad j \in Z, b \in R \quad (13)$$

由于二进小波变换具有一个重要的特性 —平移不变性[4]，因此被广泛应用于模式识别和信号的奇异性检测中。

小波分析中还有一类变换，就是所谓的小波包变换[5]。前述的小波变换把信号按照二进频带分解成小波分量，小波包变换则是对于小波分量的再分解。以下仅给出正交小波包的定义。

定义　函数 $\Psi_n, n = 2l, 2l+1; l = 0, 1, \cdots$，为正交小波包，若

$$\begin{cases} \Psi_{2l}(x) = \sum_k P_k \Psi_0(2x - k) \\ \Psi_{2l+1}(x) = \sum_k q_k \Psi_0(2x - k) \quad 3 \end{cases} \quad (14)$$

而系数 $q_k = (-1)^k \overline{P}_{-k+1}$。

5　信号的小波表示

(1) 信号表示为小波分量的叠加

研究小波变换的目的在于用小波表示信号。对于离散小波变换和二进小波变换，这种表示可由它们的逆变换直观看出

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} (W_\Psi f)\left(\frac{1}{2^j},\frac{k}{2^j}\right)\tilde{\Psi}_{j,k} \quad (15)$$

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[2^{j/2}(W_\Psi f)(2^{-j},b)] \times \{2^{-j}\tilde{\Psi}[2^j(t-b)]\}\,\mathrm{d}b \quad (16)$$

其中，$\tilde{\Psi}$ 是 Ψ 的对偶，它是前述共轭概念的推广。

根据(15)、(16)，信号 $f(t)$ 可以表示为不同频率的小波分量的和，即

$$f(t) = \sum_j g_j = \cdots + g_{-1}(t) + g_0(t) + g_1(t) + \cdots \quad (17)$$

当信号 $f(t)$ 被分解为小波后，对信号的研究就转化为对其小波分量或在某一尺度(不同的 j) 下的小波变换的研究。

(2) 小波函数的多样性

与 Fourier 变换不同，小波变换中的小波函数具有多样性。不同的信号、不同的研究目的、采用不同的小波变换对于小波函数的要求各不相同。譬如，要求小波函数具有正交性、一定的对称性和光滑性等，这些要求经常矛盾，需要在应用中合理予以取舍。在两类重要的小波变换中，因为只有部分连续小波变换的值用于重构原信号，因而对小波函数提出了更高的要求，与之对应的小波有两类：R 小波和二进小波。

定义 2　一个 R 函数[3] Ψ 被称为是一个 R 小波，如果 Ψ 的对偶 $\tilde{\Psi}$ 存在。

定义 3　一个函数 Ψ 被称为是一个二进小波[4]，如果存在常数 $0 < A \le B < \infty$，使得下式成立

$$A \le \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(2^{-j}\omega)| \le B \quad (18)$$

小波和小波变换虽然种类繁多，但本文将局限于介绍离散小波更换和二进小波变换、R 小波和二进小波。

6　小波分析的发展史及应用概况

如前所述，小波变换的本质是用一个小波基函数来表示一个能量有限的信号。小波分析的思想来源于伸缩与平移。

小波分析方法的提出可以追溯到 1910 年 Harr 提出的第一个小波规范正交基；1984 年法国地质学家 Morlet 和理论物理学家 Grossman 提出了连续小波变换的概念、1986 年法国数学家 Meyer 创造性地构造出了具有一定衰减性的光滑化函数 —正交小波函数，标志着小波热潮的开始。

1987 年，法国人 Mallat[6] 提出了多分辨分析的概念，为统一地构造小波函数奠定了基础，同时给出了以他的名字命名的小波分解与重构算法 —Mallat 算法。

1988 年,Daubechies[7]构造了具有有限支集的正交小波基,至此小波分析的系统理论初步得到建立。

1990 年,崔锦泰和王建中构造了基于样条的半正交小波函数[8],使得小波分析的系统理论得到完善。

小波分析虽然是一个数学领域,但自始至终与应用科学交织在一起。1987 年 Mallat 首先把小波变换应用于计算机图象的分解与重构[6],之后,他和 Hwang Wenliang、Zhong Sifen 等人系统地建立起了一套信号奇异性检测的理论和方法[4];同时,国内外众多学者也开始把小波变换应用于自己的研究领域,像分形[2]、医学成象与诊断、地震勘探与处理、机械振动与噪声[9]、行波信号分析[10]、谐波检测等,并取得了大批成果。

小波变换的研究与应用方兴未艾,这正是本文介绍小波变换的目的。

7 结论

(1) 小波变换是在 Fourier 变换基础上发展起来的一个新的数学分支;

(2) 小波变换的思想来自于伸缩与平移;

(3) 小波变换与小波函数具有多样性;

(4) 小波变换具有时频局部化性能,是分析具有突变性质的、非平稳变化信号的理想工具;

(5) 小波变换在电力系统、特别是在故障分析与继电保护中有着广阔的应用前景。

参考文献

1 秦前清,杨宗凯. 实用小波分析. 西安:西安电子科技大学出版社,1994.
2 龚怀云,寿纪麟,王绵森. 应用泛函分析. 西安:西安交通大学出版社,1985.
3 崔锦泰[美]著,程正兴译. 小波分析导论. 西安:西安交通大学出版社,1996.
4 Mallat,S. and Hwang,W.L. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Trans. on Information Theory,1992,38.
5 程正兴. 小波分析算法与应用. 西安:西安交通大学出版社,1998.
6 Mallat,S. A theory of multi - resolution signal decomposition:the wavelet representation. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 11,1989.
7 Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure and Appl. Math. 41,1988.
8 Chui C K and Wang J Z. A cardinal spline approach to wavelets. Proc. Amer. Math. Soc.,1991.
9 赵纪元,何正嘉等. 小波包—自回归谱分析及在振动诊断中的应用. 振动工程学报,1995,(8).
10 董新洲,耿中行,葛耀中,张伏生,徐丙垠. 小波变换应用于电力系统故障信号分析初探. 中国电机工程学报,1997,(6).

收稿日期:1998—10—22

董新洲 副教授,博士后,天津大学电力系,主要从事行波保护、行波测距以及小波变换在电力系统中的应用等研究工作。

贺家李 教授,博士生导师,长期从事电力系统故障分析、继电保护领域的科学研究工作。

葛耀中 教授,博士生导师,长期从事电力系统继电保护基础理论与应用的研究。

WAVELET TRANSFORM

Part One Basic Concept

Dong XinZhou, He JiaLi (Power Department of Tianjin University,TianJin,300072,China)

Ge Yaozhong (Xi'an Jiaotong University,710049,China)

Abstract As viewed from signal processing and engineering application,the often - used mathematical terms and basical concept of wavelet and wavelet transform and the time - frequence localization feature of the wavelet transformer are introduced in this paper. It shows the wavelet transform is a desired tool to analyze non - steady variable signal and gives a basis to further understand the wavelet transform and to apply it in engineering.

Keywords Wavelet Wavelet transform Time - frequence localization

(上接 63 页)

DEVELOPMENT OF CABINET STRUCTURE AND OUTGOING LINE TYPE FOR PROTECTIVE RELAY

Zhang Jianjie (Xuchang Relay Research Institute,Xuchang,461000,China)

Abstract The development of cabinet structure and outgoing line type for power system is systematically analyzed and compared. A complete scheme is presented and has been applied in the new generation of hardware of XJ Electric Corporation.

Keywords Cabinet structure Outgoing line type