

# 电量变送器中开平方算法的研究

周大敏 重庆后勤工程学院 (630041)

**【摘要】** 按电工学定义实现的微机电量变送器中开平方运算耗时最长。本文首先分析了常用的牛顿迭代和快速查表两种开平方算法的缺点,对其改进,形成了两种自适应混合开方算法,大大提高了开平方运算的速度。

**【关键词】** 电量变送器 开平方运算

## 前言

电量变送器是电力系统实时自动监控的重要环节。目前,微机电量变送技术应用日益广泛,通过对输入电信号实时采样、数据处理,得到电压、电流、有功、无功等电量信号。变送器数据处理过程中,开平方运算耗时最长。电量变送器有两种常用算法:一种是将信号中的基频分量进行数字滤波,电压、电流以实、虚部表示的矢量形式输出,有功、无功电压、电流的矢量形式导出,开平方运算归结为 $\sqrt{R^2 + X^2}$ 形式。这一开方运算可根据精度要求进行简化计算,算法成熟且运算较小,用这种方式实现的电量变送器,由于略去了其它谐波分量的影响,误差较大。另一种算法是按电工学定义,即:

$$V = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^2(n)} \quad (1)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} i^2(n)} \quad (2)$$

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V(n)i(n) \quad (3)$$

$$Q = \sqrt{V^2 I^2 - P^2} \quad (4)$$

只要满足采样定理,以及信号周期 $T$ 恰是采样周期 $T_s$ 的整数倍时,上述表达式不会引入任何误差,因此,大多数微机电量变送器都是按式1~4算法实现的。针对式1、2、4的开方运算,常用算法有牛顿迭代法<sup>[1]</sup>和快速查表法<sup>[2]</sup>。单纯的牛顿迭代法对初值要求较严格,电流、无功功率变化范围可能较大,初值选择不当导致迭代次数很多。常规的查表法是按开方结果对表格进行等步长划分,在各区间内进行线性插值。表格的长度和开方的精度是一对矛盾,没有注意到开方函数 $f(x) = x^2 - c$ 的特点,当待开方数较小时,曲率大,插值误差也就较大。

本文首先对这两种开方算法进行了分析,并对其改进,形成了两种快速的自适应混合算法。

## 1 牛顿、快速查表开平方算法分析

### 1.1 牛顿迭代法<sup>[1]</sup>

$$\text{开平方函数表示为: } f(x) = x^2 - c \quad (5)$$

收稿日期:1996-04-03

$$\text{牛顿迭代公式为: } x_{i+1} = \frac{1}{2}(c/x_i + x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

式中  $c$  为待开方数,  $x_i, x_{i+1}$  分别为第  $i$  次,  $i+1$  次的迭代结果。由图 1 可见, 无论迭代初值  $x_0$  是大于  $\sqrt{c}$ , 还是小于  $\sqrt{c}$ , 迭代过程都是收敛的, 每次迭代结果都满足:

$$x_i \geq \sqrt{c} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

且  $x_i \geq x_{i+1}$ 。开方函数的原始牛顿迭代式为:

$$x_{i+1} = x_i - (x_i^2 - c)/2x_i \quad (8)$$

令  $\Delta x_i = x_i - \sqrt{c}$ , 则迭代式变为:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2\sqrt{c} + \Delta x_i}{2(\sqrt{c} + \Delta x_i)} \cdot \Delta x_i \quad (9)$$

$$\text{令: } \Delta x = x_i - x_{i+1} = \frac{2\sqrt{c} + \Delta x_i}{2(\sqrt{c} + \Delta x_i)} \cdot \Delta x_i \quad (10)$$

设开方结果在较大范围  $(0, x_N)$  内取值,  $\sqrt{c_L}, \sqrt{c_H}$  分别表示位于  $(0, x_N)$  低端和高端的开方结果, 根据式 10 有:

$$\Delta x_H = \frac{2\sqrt{c_H} + \Delta x_i}{2(\sqrt{c_H} + \Delta x_i)} \cdot \Delta x_i \quad (11)$$

$$\Delta x_L = \frac{2\sqrt{c_L} + \Delta x_i}{2(\sqrt{c_L} + \Delta x_i)} \cdot \Delta x_i \quad (12)$$

在式 11、12 中取  $\Delta x_i$  相同, 分析和计算表明  $\Delta x_H > \Delta x_L$ 。这意味着在相同  $x_i$  下, 开方结果  $\sqrt{c}$  分别位于  $[0, x_N]$  高端和低端, 牛顿迭代法每次的修正量  $\Delta x_H > \Delta x_L$ , 因此, 在相同精度,  $\sqrt{c}$  位于高端所用迭代次数比  $\sqrt{c}$  位于低端所用迭代次数少。换言之, 如果要获得相同的精度和相同的迭代次数, 可取:

$$x_{0H} - \sqrt{c_H} > x_{0L} - \sqrt{c_L} \quad (13)$$

$x_{0H}, x_{0L}$  分别为高、低端的牛顿迭代初值。

牛顿迭代法可以达到较高的精度, 但当所给的初值不在  $\sqrt{c}$  的某个领域内时, 迭代次数可能较多, 尤其是对电流、无功之类电量, 变化范围可能相当大, 合适的初值选取是比较困难的。

## 1.2 快速查表开方法<sup>[2]</sup>

快速查表开方法是将开方函数  $f(x) = x^2$  分段线性化, 以表格形式存储起来, 当待开方数  $x^2$  给定时, 查表找出两点满足  $x_i^2 < x^2 < x_{i+1}^2$ ,  $x_{i+1}, x_i$  之差为一个单位步长。过  $[x_i, x_i^2]$  和  $[x_{i+1}, x_{i+1}^2]$  作线性插值, 得到近似解  $x_m$ :

$$x_m = \frac{x^2 - x_i^2}{x_{i+1}^2 - x_i^2} \cdot H + x_i \quad (14)$$

$H = x_{i+1} - x_i$  为步长, 将  $x_{i+1} = x_i + H$  代入式 14 得到:

$$x_m = \frac{x^2 - x_i^2}{2x_i + H} + x_i \quad (15)$$

$$\Delta = x - x_m = (x - x_i) \left[ 1 + \frac{x + x_i}{2x_i + H} \right] \quad (16)$$

误差  $\Delta$  与步长  $H$  有关, 如果  $H$  取得足够小, 那么  $x_m$  就能足够接近真值  $x_m$ 。当  $H$  取得足够

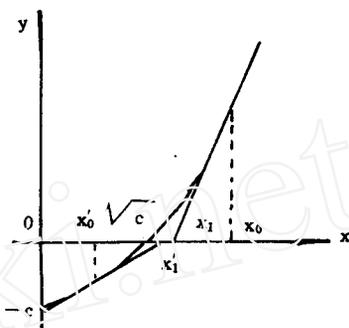


图 1 牛顿迭代开方法

小时,表格占用内存开销很大,查表时间也较长。通常在划分表格时,步长是一致的。从式 16 看出,误差也与  $x$  所处区段  $x_i$  有关。开方函数  $f(x) = x^2$  的曲率为:

$$K = 2/(1 + 4x^2)^{3/2} \quad (17)$$

可见曲率  $K$  与  $x$  大小有关,即表格各区间对应曲线段弯曲程度不一样。当步长一致,用直线逼近开方函数时,各区间求解的最大误差是不一样的。当待开方数  $x^2$  较小,线性插值得到的解  $x_m$  与实际值  $x$  差别较大。反之,如果用直线逼近开方函数,要保证误差一致,则应取不等步长,低端步长小,高端时步长大。用不等步长存储表格与等步长方式相比,可减少表格的存储量,提高查表时间。

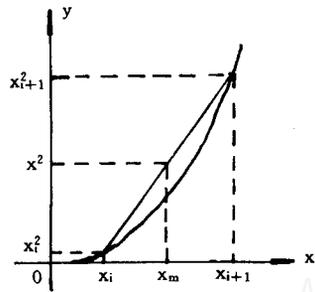


图 2 快速查表开方法

## 2 自适应混合开平方算法

### 2.1 自适应分段线性化开方法

从前面的分析得知,快速查表法计算简单,但精度与表格容量相矛盾,当采用等步长存储表格时,各段误差不一致。从图 2 看出,误差  $\Delta = x - x_m > 0$ ,如果允许正负误差,在保证  $|\Delta|$  相同条件,双向误差允许的步长  $H$  显然要大于单向误差允许的步长。如图 3 所示。在  $(x'_i, x'_{i+1})$  内,误差  $|\Delta|$  与  $(x_i, x_{i+1})$  内的误差相同,由于

$$x'_{i+1} - x'_i > x_{i+1} - x_i \quad (18)$$

因此,按  $|\Delta|$  控制步长,可减小存储表格所需内存,提高查表速度。

设开方允许误差为  $|\epsilon|$ ,将开方函数表示为  $x = \sqrt{y}$ ,  $y$  为待开方数,可构造两个上、下限函数:

$$x_1 = \sqrt{y} - \epsilon \quad (19)$$

$$x_2 = \sqrt{y} + \epsilon \quad (20)$$

函数图形如图 4 所示。

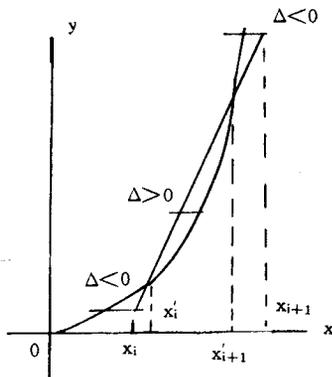


图 3 单向误差与双向误差

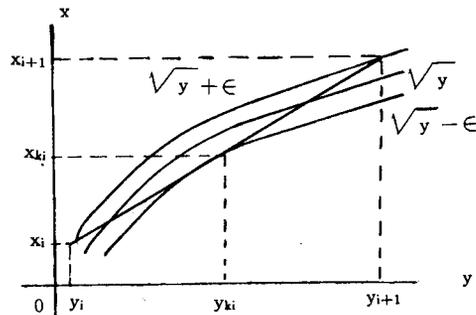


图 4 上、下限函数

从曲线  $x_2$  上点  $(y_i, x_i)$  作  $x_1$  的切线交于  $(y_{ki}, x_{ki})$ , 延长切线交于  $x_2$  的  $(y_{i+1}, x_{i+1})$ 。则:

$$\frac{x_{ki} - x_i}{y_{ki} - y_i} = \frac{dx_1}{dy} / y_{ki} \quad (21)$$

$$\frac{x_{i+1} - x_{ki}}{y_{i+1} - y_{ki}} = \frac{dx_1}{dy} / y_{ki} \quad (22)$$

整理式 21、22 得:

$$y_{K_i} - 2(\sqrt{y_i} + 2\epsilon)\sqrt{y_{K_i}} + y_i = 0 \quad (23)$$

$$y_{i+1} - 2\sqrt{y_{K_i}}\sqrt{y_{i+1}} + (y_{K_i} - 4\epsilon\sqrt{y_{K_i}}) = 0 \quad (24)$$

为简便起见,令:

$$y_i = x_i^2, \quad y_{K_i} = x_{K_i}^2, \quad y_{i+1} = x_{i+1}^2$$

$$\text{得: } x_{K_i}^2 - 2(x_i + 2\epsilon)x_{K_i} + x_i = 0 \quad (25)$$

$$x_{i+1}^2 - 2x_{K_i}x_{i+1} + (x_{K_i}^2 - 4\epsilon x_{K_i}) = 0 \quad (26)$$

$$\text{解得: } x_{K_i} = (x_i + 2\epsilon) \pm 2\sqrt{\epsilon(x_i + \epsilon)} \quad (27)$$

$$x_{i+1} = x_{K_i} \pm 2\sqrt{\epsilon x_{K_i}} \quad (28)$$

显然取正号才合理,即:

$$x_{K_i} = (x_i + 2\epsilon) + 2\sqrt{\epsilon(x_i + \epsilon)} \quad (29)$$

$$x_{i+1} = x_{K_i} + 2\sqrt{\epsilon x_{K_i}} \quad (30)$$

计算表明有以下关系:

$$x_{i+1} - x_{K_i} = x_{K_i} - x_i$$

$$\text{所以 } x_{i+1} = 2x_{K_i} - x_i \quad (31)$$

根据式 29,当区间下限  $x_i$  和误差  $\epsilon$  给定后,可求出切点位置  $x_{K_i}$ ,进而求出区间上限  $x_{i+1}$ ,在各区间  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) 内作线性插值:

$$x = K_i \cdot y + b_i \quad (32)$$

$y$  为待开方数,  $K_i$  为斜率,  $b_i$  为截距。

根据替代关系  $y_{K_i} = x_{K_i}^2$ ,在切点有:

$$K_i = \frac{1}{2x_{K_i}} \quad (33)$$

同理,在切点有以下关系:

$$x_{K_i} - \epsilon = K_i x_{K_i}^2 + b_i$$

$$\text{得到 } b_i = \frac{1}{2}x_{K_i} - \epsilon \quad (34)$$

实际计算表明,由式 32 计算结果其精度高于快速查表法在同样区间  $[x_i, x_{i+1}]$  的开方结果。按式 32 计算的最大误差出现在切点和区间的两 endpoint。

上面分析中,假定各区间误差都为  $|\epsilon|$ ,当  $|\epsilon|$  较小时,步长变化缓慢。实际上,误差  $|\epsilon|$  随  $x_i$  变化更合理。如取:

$$\epsilon = Kx_i \quad (35)$$

代入式 29 得:

$$x_{K_i} = (\sqrt{K} + \sqrt{1+K})^2 x_i \quad (36)$$

$$x_{i+1} = [2(\sqrt{K} + \sqrt{1+K})^2 - 1]x_i \quad (37)$$

不同的是,式 36、37 中  $x_i$  当  $i = 0$  时,不能取  $x_0 = 0$ 。

## 2.2 牛顿开方算法

上面介绍的自适应分段线性化开方算法计算量小,但当存储表格一定时,误差就确定了,不灵活。这里将查表与牛顿迭代法相结合,形成一种混合开方算法。查表用于给出牛顿迭代初值,根据 1.1 节的分析,为保证快速性,减少查表时间和表格存储容量,采用不均匀步长划分表

格。

不均匀步长表格可以用多种方式获得,比如用 2.1 节介绍的确定  $[x_i, x_{i+1}]$  的方法。这里介绍一种简便方法。

设开方结果的变化范围为  $[0, X_N]$ , 在  $[0, X_N]$  的第一个区间  $[0, x_1]$  取步长  $\Delta x = x_1$  为基准, 第  $i$  个区间步长为:

$$\Delta x_i = K^i \cdot \Delta x \quad (38)$$

$K$  可在 1.6 ~ 2.0 内取值。区间上界  $x_{i+1}$ :

$$x_{i+1} = x_i + K^i \cdot \Delta x \quad (39)$$

查表得到  $x_i^2 < x^2 < x_{i+1}^2$ , 取迭代初值  $x_0 = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ , 按下式:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + c/x_n) \quad (40)$$

进行迭代。为加快收敛性, 对上式可作点小改进, 取:

$$x_{n+1} = \frac{m}{2}(x_n + c/x_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (41)$$

$m$  为加速因子, 表格推导  $m$  表达式也无必要。根据图 1, 牛顿法每次迭代结果  $x_n \geq \sqrt{c}$ , 因此  $m \leq 1$ , 计入  $m$  的简单办法是将迭代结果的低字节在第一、二次迭代后去掉几个误差限。比如第一次迭代后去掉 6 个误差限, 第二次迭代后去掉 1 ~ 2 个误差限。

将不等步长表格与牛顿迭代相结合, 在精度要求相同条件下, 基本上满足各区间迭代次数大致相同。

### 3 结论

本文在分析牛顿迭代开方算法和快速查表算法的基础上, 介绍了两种改进算法, 减少了存储容量, 降低开方所需时间, 具有实用价值。

#### 参考文献

- 1 李仁俊等. 电力系统动态电量的实时测量及快速电量变送器. 电力系统自动化. 1991. 6
- 2 胡德功等. WDB-1 型微机电量变送器. 电力系统自动化. 1990. 5

(上接 14 页)我国的 BCH 型差动继电器)的材料及设计制造工艺水平较低, 当频率低时其传变能力及差动保护的灵敏度下降。但是, 即使在七十年代, 国外文献报导电子型继电保护产品的低频特性相当好, 例如日本的水殿抽水蓄能电站的机组保护为晶体管分立元件型的常规保护, 七十年代末通过试验证明其低频特性符合安全运行的要求。我国潘家口水电站及十三陵水电站等抽水蓄能机组的继电保护是进口的集成电路型及晶体管分立元件型产品, 都是常规的保护, 未设置针对起动过程中低频区的特殊保护及特殊措施。

现代计算机型机组保护都具有频率自动跟踪措施, 在低频时保护的算法及动作特性不受影响。此外, 我国不少制造保护装置用的电流电压互感器的厂家已引进八十年代日本及西方的 R 型铁芯的先进技术, R 型铁芯材料采用铁损极小的高磁通密度的冷轧硅钢带, 铁芯横截面为圆形, 铁芯柱不再切割分开, 漏磁很小, 互感器的传变能力及精度显著提高。因此, 当采用了频率自动跟踪技术、合理的算法以及高性能的电流电压互感器, 可以认为现代研制的抽水蓄能机组微型保护装置能满足起动过程中低频区的要求。

#### 参考文献

- 1 该文刊登于 IEEE Transactions on Power Apparatus and System No. 3. 1975

This paper simply describes the mathematic model for computer setting calculation of bus differential protection, consideration of operation mode, protection setting principle, and setting calculation program of the bus differential protection written basing on the above method. The program has been applied in a real electric network and can meet the requirement of engineering calculation.

**Key words:** bus differential protection, computer calculation

**Research The Algorithm of Extracting The Square Root in Electric Transducer ..... Zhou Damin(30)**

It will take a lot of time to extract the square root in the microprocessor-based electric transducer realized on electrotechnical laws. This paper firstly analyzes the shortcomings of the two algorithms of extracting square root, Newton iteration and fast table look-up, and improve them to yield two adaptive combined algorithms of extracting the square root. Thus the speed of extracting the square root increases greatly.

**Key words:** electric transducer, algorithm of extracting the square root

### NEW PRODUCT DEVELOPMENT

**General-Used High Accuracy Optic-Fibre Sensing System ..... Zhang Peiming, et al(35)**

This paper introduces a general-used high accuracy optic-fibre sensing system which is suitable for on-line measuring current.

**Key words:** general-used, optic-fibre sensing system, on-line detection

**Developmet of Electromagnetic Relay CAD Expert System ..... Xiu Shixin, et al(39)**

The architecture, function, building method and feature of the electromagnetic relay CAD expert system are described. The system is equipped with an experience knowledge base of relay expert, which can form judgement and inference upon the expert experience knowledge and simulate the design thinking and solving way of the experts. Application of the expert system technique in CAD solves the non-numerical questions in conventional CAD system and has important significance in realizing intellectualization and automation of electric product.

**Key words:** electromagnetic relay, CAD, expert system

**Application of Integration Development Technology in Upgrade of relaying panel CAD system ..... Xu Tao, et al(43)**

**Research on KGD3 Control Power Supply of Electromagnetic Brake ..... Xie Shuangquan, et al(48)**

### SERVICE EXPERIENCE

**Discussion on Preventing DC Parasitic Circuit And One-Point-Earthing ..... Zou Shenyuan(52)**

Some accident examples of parasitic circuits occurring in relay device are listed. The improving method is presented by analyzing these examples and how to use the special-used terminals in The Keyoints of Anti-accident Measure in Relay and Safety Automation Device' is described. This paper also analyzes the relationship between the capacitance of dc postive and negative poles to earth and the voltage of both coil ends and the measures to be taken when the positive terminal of output auxiliary relay coil earthes.

**Key words:** parasitic circuit, one-point-earthing

**Discussion on The Relay Protection And Secondary Circuit in Main Electric Connections of  $1 \frac{1}{2}$  Circuit Breaker Used for 220kV Substation ..... Zhang Huaqing(58)**

**Discussion on Selectable Recording of Fault Recorder in Guangyinge Substation ..... Wang Bing(64)**

**Application Problem of Economizer Signal Lamp in Control Signal Circuit and Its Solution ..... Chen Yuanpeng(65)**

**Application of ZRJ-03 Intelligent Thermotechnic Meter Calibration System ..... Wang Dean(67)**

### STRUCTURE AND TECHNOLOGY

**Discussion on Several Questions of CAPP ..... Xia Chuenhou, et al(71)**

**Significance of Application and Dissemination of SMT ..... Yin Xuebo, et al(74)**

This paper explains the significance of application and dissemination of SMT and analyzes the process of SMT and THT. It also describes the feasibility of SMT.

**Key words:** SMT, SMD, SMC, SMB

**Technology and Quality Control During The Trial-Production of Relay Protection Product Prototype ..... Wang Jie(77)**

Technology and quality control is closely related with the quality of prototype trial-prduction of relay protection product. In view of the speciality of prototype trial-production and the site management of trial-production, the action of technology and quality control during the trial-production of relay prototype is described.

**Key words:** prototype trial-production, technology, quality