一种相量模的近似算法

喻伟军　上海市奉贤县供电局(201400)

序言

随着计算机在电力系统中的运用，算法研究越来越为人们所重视。然而，相量模的计算在其中扮演着一个比较重要的角色，下面介绍一种相量模的近似算法。

1　相量模的近似算法

由于用微机进行开方的计算，其计算量很大，很费机时，不利于微机保护的快速动作，因而，我们采用以泰勒级数为基础的近似算法。

设　$f(x)=\sqrt{1+x}$　那么其泰勒级数为：

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots\cdots \quad |x|<1 \tag{1}$$

由 1 式可以看出，假若 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，f(x)的泰勒级数收敛很快，只须取前面 2～3 项，其误差就不会太大，而且计算量小。

相量求模的公式为：

$$A=\sqrt{A_R^2+A_I^2} \tag{2}$$

其中　A_R——相量实部

A_I——相量虚部

取 $|A_R|$ 和 $|A_I|$ 两数中大者为 L，小者为 S，即定义：

$L \triangleq \max(|A_R|,|A_I|)$

$S \triangleq \min(|A_R|,|A_I|)$

$P \triangleq S/L$

1.1　当 $P<\frac{1}{2}$ 时，由 1 式可知：

$$\begin{aligned} A &=\sqrt{A_R^2+A_I^2}=L\sqrt{1+p^2} \\ &=L(1+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{8}p^4+\frac{1}{16}p^4-\cdots\cdots) \end{aligned} \tag{3}$$

我们取前三项得：

$$\overline{A}=L(1+\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{8}p^4) \tag{4}$$

由 3 可知：

$$0\leqslant|\overline{A}-A|\leqslant\frac{1}{16}p^2=\frac{1}{2^{10}}$$

故 4 式还可近似为：

收稿日期：1994－04－05

$$\overline{A}=L\left[1+\frac{1}{2}p^2(1-\frac{1}{16}+\frac{1}{128})\right]=L+\frac{S^2}{L}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}+\frac{1}{256}\right) \tag{5}$$

1.2　若 $1>p>\frac{1}{2}$ 时，2 式可化为：

$$A=\sqrt{A_R^2+A_I^2}=\sqrt{(|A_R|+|A_I|)^2-2|A_RA_I|}$$
$$=(|A_R|+|A_I|)\sqrt{1-\frac{2|A_RA_I|}{(|A_R|+|A_I|)^2}}$$

令：$X(p)=-\frac{2|A_RA_I|}{(|A_R|+|A_I|)^2}=\frac{2p}{(1+p)^2}$

则 $A=(|A_R|+|A_I|)(1-\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2-\frac{1}{16}X^3-\cdots)$　(6)

同样取前三项：

$$\overline{A}=(|A_R|+|A_I|)(1-\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2) \tag{7}$$

因为：$X'(p)=\frac{2(1+p)^2-4p(1+p)}{(1+p)^4}=\frac{2-2p}{(1+p)^3}>0$

故　X(p)为递增的，即：

$$X(\frac{1}{2})=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2}=0.4444$$

$$X(1)=\frac{2}{(1+1)^2}=0.5$$

所以　$0.4444\leqslant X(p)\leqslant 0.5$

由 6 式可知：

$$0<\overline{A}-A<\frac{1}{16}X^3=\frac{1}{27}$$

故 7 式还可近似为

$$\overline{A}=(|A_R|+|A_I|)\left[1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})X(p)\right]$$
$$=|A_R|+|A_I|-(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})\frac{2|A_RA_I|}{|A_R|+|A_I|}$$
$$=|A_R|+|A_I|-(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{32})\frac{|A_RA_I|}{|A_R|+|A_I|} \tag{8}$$

由上推导可以看出，模的近似算法可表示为：

$$\overline{A}=\begin{cases}L+\frac{S^2}{L}(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}+\frac{1}{256}) & p\leqslant\frac{1}{2}\\ |A_R|+|A_I|-(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{32})\frac{|A_RA_I|}{|A_R|+|A_I|} & p\geqslant\frac{1}{2}\end{cases} \tag{9}$$

2　误差分析

2.1　当 $\frac{1}{2}>p>0$ 时

$$\varepsilon(p)=1-\frac{\overline{A}}{A}=1-\frac{L+\frac{S^2}{L}(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}+\frac{1}{256})}{\sqrt{L^2+S^2}}$$
$$=1-\frac{1+p^2\cdot\frac{121}{256}}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\varepsilon'(p)=-\frac{\frac{121}{128}p\sqrt{1+p^2}-\frac{121}{256}p^2\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2}$$

$$=\frac{\frac{121}{256}p^3-\frac{121}{128}p(1+p^2)}{(1+p^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{-\frac{121}{256}p^3-\frac{121}{128}p}{(1+p^2)^{3/2}}<0$$

故 $\varepsilon(p)$ 为减出数

$$\varepsilon(0)=1-1=0$$

$$\varepsilon(\frac{1}{2})=1-\frac{1+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{16}+\frac{1}{128})}{\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}}=-0.000116$$

故： $|\varepsilon|<0.0116\%$

2.2 当 $1>p>\frac{1}{2}$ 时

$$\varepsilon(p)=1-\frac{(|A_R|+|A_I|)[1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})X(p)]}{(|A_R|+|A_I|)\sqrt{1-X(p)}}$$

$$=1-\frac{1-\frac{37}{64}X(p)}{\sqrt{1-X(p)}}$$

$$\frac{d\varepsilon(p)}{dX(p)}=-\frac{-\frac{37}{64}\sqrt{1-X(p)}-[1-\frac{37}{64}X(p)]\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x(p)}}}{1-X(p)}$$

$$=\frac{\frac{5}{64}-\frac{37}{128}X(p)}{(1-X(p))^{3/2}}<0$$

故 $$\varepsilon(\frac{1}{2})=1-\frac{1-\frac{37}{64}\times 0.4444}{\sqrt{1-0.4444}}=0.00309$$

$$\varepsilon(1)=1-\frac{1-\frac{37}{64}\times 0.5}{\sqrt{1-0.5}}=-0.005417$$

故 $|\varepsilon|<0.5417\%$

3 结论

由于该算法的系数皆是2的整数次方，所以可以利用二进制数的移位来代替除法。在整个计算过程中，每次只须计算二次乘(除)法。运算时间比较短，最大误差只有0.005417。

程序设计框图见右图：