微机保护中递推最小二乘法的应用问题

成都科技大学电力系　李烈忠　周　超

摘要　本文在阐述微机保护中递推最小二乘法原理的基础上，用系统辨识理论对该算法的递推初值问题与算法的收敛性、无偏性等进行了讨论，得出了较为满意的结果。

关键词　拟合函数　最小二乘法　系统辨识

1　前言

在微机保护中递推"最小二乘拟合算法"较其它算法具有很多优点，数据窗的大小能随采样点的增多而自动加长，完全利用故障后信息。理论和实验结果表明，该算法能有效实现保护的反时限动作特性，且计算量小、算法简便、收敛速度快、收敛过程稳定。递推最小二乘法在微机保护中受到广泛的重视与应用。

本文通过建立虚拟系统模型，用系统辨识理论研究了递推最小二乘法的递推初值问题和该算法的渐近性。

需要指出的是，递推最小二乘法的收敛过程及稳定性问题还应进一步深入研究。同时，为了更好地跟踪电力系统的动态性质，对递推最小二乘法算式引入遗忘因子后，算法的渐近性发生一些偏移。这些还需要进一步进行理论与实验的研究。

2　递推最小二乘算法原理回顾

2.1　最小二乘算法

最小二乘算法在微机保护，特别是在微机距离保护中，有广泛的应用。这种算法是将输入的暂态各量值与一预设的含有非周期分量、基频分量和某些整次谐波分量的函数依据最小二乘原则进行拟合，拟合函数一般可选择为：

$$y(t) = x_0 exp(-t/Td) + \sum_{j=1}^{n}(x_{Rj}\cos j\cdot\omega t + x_{Ij}\cdot\sin j\cdot\omega t),$$

或

$$y(i) = x_0\cdot exp(-iTs/Td) + \sum_{j=1}^{n}[x_{Rj}(\cos j\omega iTs) + x_{Ij}(\sin j\omega iTs)]$$

写成矩阵形式有：

$$y(i) = h(i)X$$

式中：$h(i) = [exp(-iTs/Td), \cos\omega iTs, \cdots, \cos n\omega iTs, \sin n\omega iTs]$；

$X = [X_0, X_{R1}, X_{I1}, \cdots, X_{Rn}, X_{In}]^T$；

X_0：衰减直流分量的起始值；T_d：衰减直流分量的时间常数；

ω：基频角频率；T_S：采样周期；

X_{Rj}、X_{Ij}：第j次谐波分量的正弦和余弦项幅值。

本文1992年12月29日收稿

由此得在残差绝对值平方和：$J=\sum_{j=1}^{k}[z(j)-y(j)]^2$ 为最小时的最小二乘估计为：

$$\hat{X}(k)=(H^T(K)H(k)^{-1}H^T(k)\cdot Z(k) \tag{1}$$

其中：

$$H(K)=\begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \cdots \\ h(k) \end{bmatrix} \qquad Z(k)=\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \cdots \\ z(k) \end{bmatrix}$$ 为采样值矩阵；

$\hat{X}(K)$ 为待估计向量 X 的估计值。

2.2 递推最小二乘法

假设新增采样数据 Z（k+1），相应的参数估计为 x（k+1），由方程（1）有：

$$x(k+1)=[H^T(k+1)H(k+1)]^{-1}H^T(k+1)\cdot Z(k+1)$$

式中：

$$H(k+1)=\begin{bmatrix} H(k) \\ h(k+1) \end{bmatrix}; \qquad Z(k+1)=\begin{bmatrix} Z(k) \\ Z(k+1) \end{bmatrix}$$

令：$P(k)=(H^T(k)H(k))^{-1}$

利用矩阵求逆公式有：

$$\begin{aligned} P(k+1)&=[H^T(k+1)\cdot H(k+1)]^{-1} \\ &=P(k)-P(k)\cdot h^T(k+1)[h(k+1)\cdot h^T(k \\ &\quad +1)+1]^{-1}\cdot h(k+1)\cdot p(k) \end{aligned} \tag{2}$$

则：

$$\hat{x}(k+1)=\hat{x}(k)+K(k+1)[z(k+1)-h(k+1)\cdot \hat{x}(k)] \tag{3}$$

$$k(k+1)=P(k)\cdot h^T(k+1)\cdot [h(k+1)P(k)\cdot h^T(k+1)+1]^{-1} \tag{4}$$

在递推方程（2～4）中，增益矩阵 K（k+1）是与采样值无关的量，可事先求出。因此，实时计算可仅利用方程（3）进行。

3 系统辩识模型的建立

最小二乘法中，对暂态电量常采用拟合函数：

$$y(i)=X_0\cdot exp(-iTs/Td)+\sum_{j=1}^{n}[X_{Rj}\cdot\cos(j\omega iTs)+X_{Ij}\cdot\sin(j\omega i\cdot Ts)] \tag{5}$$

式(5)可看成如下系统模型的方程：

其中：

$$G(k)=\begin{bmatrix} exp(-Ts/Td), & \cos\omega Ts, & \sin\omega Ts, & \cdots, & \cos n\omega Ts, & \sin n\omega Ts \\ exp(-2Ts/Td), & \cos 2\omega Ts, & \sin 2\omega Ts, & \cdots, & \cos 2n\omega Ts, & \sin 2n\omega Ts \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ exp(-kTs/kd), & \cos k\cdot\omega Ts, & \sin k\omega Ts & \cdots, & \cos kn\omega Ts, & \sin kn\omega Ts \end{bmatrix}$$

$\theta(k)=(X_0, X_{R1}, X_{I1}, \cdots, X_{Rn}, X_{In})^T$ 为系统 H（k）的系统参数。

$z(k)=(z_1, z_2, \cdots, z_k)^T$

$e(k)=(e_1, e_2, \cdots, e_k)^T$

对于一组采样值，θ（k）是不变的，因此图 1 是时不变系统；对于多组采样值，θ（k）是

时变的，有了以上系统模型，就可用系统辨识理论的方法，对微机保护中最小二乘法的许多问题进行研究。这里：探讨了递推最小二乘法中的递推初值问题；讨论了递推最小二乘法的估值渐近性问题。

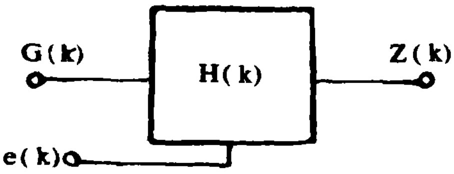

图 1

4 递推初值的简化处理

对于式（2、3、4），取 X=〔X_0，X_{R1}，X_{I1}，…，X_{Rn}，X_{In}〕，在这种递推格式中，递推初值是 N=2n+1，即初值为：

$$X_{2n+1}=[H^T(2n+1)\cdot H(2n+1)]^{-1}H^T(2n+1)\cdot Z(2n+1)$$

这常常仍嫌不便，如果能以 N=0 为初值，从 N=1 就用递推公式，那就方便得多。但简单地从 N=1 递推计算，上述递推算式成立的基本条件 rank〔H（k）〕=2n+1 并不满足。所以应当将关系适当加以变化。

令 N=0 时，初值 P_0^* 和 X_0^* 分别为：

$$\begin{cases}P_0^*=a^2\cdot I\\ \hat{X}_0=0\end{cases}$$

这样递推下去，N=1 时：

$$P_1^*=\left[(H_0^{*T}h^T(1)\begin{pmatrix}H_0^*\\ h(1)\end{pmatrix}\right]^{-1}=(p_0^{*-1}+h_1h_1^T)^{-1}$$

$$X_1^*=P_1^*H^*(1)z(1)\cdots$$

N=2n+1 时：

$$P_{2n+1}^*=[P_0^{*-1}+H^T(2n+1)\cdot H(2n+1)]^{-1}$$

$$X_{2n+1}^*=P_{2n+1}^*\cdot H^T(2n+1)\cdot z(2n+1)$$

由此看到，如果 α^2 取得尽可能大，只要机器允许，例如取 $\alpha^2=10^5\sim10^{10}$，则 P_0^{*-1} 近于零，于是迭代到 N=2n+1 时，可以认为：

$$P_{2n+1}^*=P_{2n+1},\quad X_{2n+1}^*=X_{2n+1}$$

这便是正常递推之初值，从此以后，X_N 就具有使用的意义。

所以，对于最小二乘法，可简单地从 N=1 开始递推计算。

5 递推最小二乘法估值结果讨论

5.1 无偏性问题

从前面的讨论如：

$X(k)=(H^T(k)H(k))^{-1}H^T(k)\cdot Z(k)$

将 $z(k)=H(k)\cdot X+e_k$ 代入上式得：

$\hat{X}(k)=X+(H^T(k)\cdot H(K)^{-1}\cdot H^T(k)\cdot e_K$

∵ H（k）仅与采样点数 k 有关，与 e_k 统计无关，

∴ 若 E（e_k）=0．则 E［X（k）］=0

当不考虑系统误差，e_k 为随机误差服从高斯分布：

$$\therefore \quad E[e_k] = 0$$

$$\therefore \quad e[X(k)] = X$$

5.2 渐近性问题

下面，我们来讨论递推最小二乘法的渐近性问题。

预备理论：对于方程：$y(t) = \theta^T \varphi(t) + v(t)$

其中，参数向量 θ 是一个待估向量，要根据测量数据 $y(t)$ 和 $\varphi(t)$，$(t=1, 2, \cdots N)$ 来估计。

选择准则函数：

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} a_t[y(t) - \theta^T \varphi(t)]^2 \tag{6}$$

$\{a_t\}$ 是一个正数序列，令 $V_N(\theta)$ 关于 θ 为极小，则得 $\hat{\theta}(N)$ 的最小二乘估计式：

$$\theta(N) = \left[\sum_{t=1}^{N} a_t \varphi(t) \varphi^T(t)\right]^{-1} \sum_{t=1}^{N} a_t \varphi(t) y(t) \tag{7}$$

引理：对于式 6，如果有：

(1) $\{V(t)\}$ 是零均值的独立随机变量（白噪声）序列，$V(t)$ 与 $(t-1)$ 时刻延期以前时刻的情况无关，同时 $E[v(t)\varphi(t)] = 0$

(2) 输入序列 $\{u(t)\}$ 与零均值噪声序列 $\{v(t)\}$ 独立无关，并在 $\varphi(t)$ 中只包含着与输入有关的项。而且 $v(t)\varphi(t) = 0$

那么，当 N 趋向于∞时，$\hat{\theta}(N)$ 收敛于真值 θ.

令 7 式中 $a_t = 1$，则得到一般最小二乘法的计算公式。

容易证明，引理的条件（1）、（2）对于这里介绍的递推最小二乘法是满足的；所以，这里递推最小二乘法的估值 X，当 $N \to \infty$ 时将收敛于真值 X_0.

参考文献

1 袁本恕．计算机控制系统．中国科学技术大学出版社，1989，7

2 于尔铿主编．电力系统状态估计，水利电力出版社，1985，6

3 张哲、陈德树．递推最小二乘法在微机距离保护中的应用研究，电力系统自动化，1991，No. 4. 5

4 L．雍等著．田立生等译．递推辩识理论．科学出版社，1989

5 IEEE 教材，叶一麟等译校．微处理机式继电器和保护系统．重庆大学出版社，1990

更　正

本刊 1993 年第 3 期封三页，正数第 14 行“DZ－100 系列”应改为“DZ－10 系列”；倒数第 3 行“大南街一段 5 号”应改为“大南街一段 1 号”；倒数第 2 行“藏志国”应改成“臧志国”。特此更正。