单片机求相量幅值的一种较精确快速算法

华中理工大学　周良松　尹项根　胡会骏

摘要　在电力系统计算中，不可避免的要遇到求相量幅值的情况，比如求电压幅值 $V=\sqrt{(Vr\times Vr+Vi\times Vi)}$，求阻抗的模 $|Z|=\sqrt{(R\times R+X\times X)}$ 等等。然而在电力系统微机保护和监控的实时计算中，常常为完成开平方求相量幅值的计算而花去了大量的宝贵时间。为此，不少文章寻找近似算法，例如，文献[1]采用了分段线性化法，文献[2]采用了函数逼近法，在提高其计算速度和精度方面取得了一定的成绩。但是现有的各种算法，不能同时兼顾两者的关系，往往不是精度不够，就是速度较慢。对于工程上要求计算速度和精度都比较高的场合，则需要寻找一种较好的算法。本文从最基本的泰勒展开出发，提出了一种既有较快计算速度，又有较高精度的近似算法。该算法用汇编语言编程简单，文中给出了程序框图和用96单片机汇编语言编写的程序，在时钟为12MHz的8096单片机上运行表明：最大相对误差为0.17%，计算时间约为30微秒。

关键词　相量幅值　泰勒展开

1　对现有算法的一般分析

设相量 X＝a＋jb，那么幅值为：

$$M=\sqrt{(a^2+b^2)}$$

按传统方法计算，需要经过两次乘法、一次加法和一次开平方运算，其中开平方是一个超越函数，运算速度很慢，在超越函数的近似算法中，人们经常采用的方法有：（1）查表插值法，该法简单，计算量较少，它特别适用于复杂函数的计算，但缺点是需预先存贮一个较大的表格。（2）分段线性化法，它有时能使函数简化。（3）连续函数逼近法，该法编程序简单，使用方便，但常常较难同时兼顾精度和速度，关键在于如何找到一个合适的逼近函数。（4）牛顿法，它有较高的收敛精度和速度，但其迭代次数与初值的选取有关。（5）泰勒展开法，可以说，它是大部分近似算法的理论依据，关键在于如何展开和舍去高阶项。以上这些方法各有其优缺点。对于开方求相量幅值的算法，文献[1]采用了分段线性化法，而文献[2]采用了连续函数逼近法。对于相量 $X=a+jb$

并令：　$L=\max\{|a|,|b|\}$

　　　　$S=\min\{|a|,|b|\}$

文献[1]采用的近似公式为：

$$M=L+\frac{S}{3} \tag{1}$$

该算法计算量较小，除了对 a 和 b 求绝对值并比较大小外，另外只需一次除法和一次加法运算，但其精度较低，相对误差为5.7%。文献[2]采用的近似公式为：

本文1992年9月收稿

$$M = L + 0.4285 \times \frac{S^2}{L} \tag{2}$$

该算法虽然比文献[1]多了一次除法和一次乘法，但其相对误差提高到1%。

2 用泰勒展开法寻找新的算法

为了寻找新算法，我们不妨建立一个方程：

$$x^2 - a^2 - b^2 = 0 \tag{3}$$

并设函数：$f(x) = x^2 - a^2 - b^2$

若 M 是方程(3)的一个根，则有 $f(M) = 0$

假设有一个靠近 M 的近似根 c 且满足：

$$|c - M| < \varepsilon \tag{4}$$

将 f（x）在点 c 处泰勒展开，由于 f（x）的各阶导数为：

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

故有 $f(x)$ 在点 c 处的精确泰 勒展开式：

$$f(x) = c^2 - a^2 - b^2 + 2c(x - c) + (x - c)^2$$

把 $x=M$ 代入上式得方程：

$$c^2 - a^2 - b^2 + 2c(M - c) + (M - c)^2 = 0$$

上式两边同时除以 2c，并整理得：

$$\begin{aligned} M &= \frac{c^2 + a^2 + b^2}{2c} - \frac{(M - c)^2}{2c} \\ &= M' + R(c) \end{aligned}$$

上式中

$$M' = \frac{c^2 + a^2 + b^2}{2c} \tag{5}$$

$$R(c) = -\frac{(M - c)^2}{2c} \tag{6}$$

其中 M' 为 M 的近似项，而 $R(c)$ 为误差项。

从上式可以看出，当 c 比较靠近点 M 时，即当：

$|M - c| < \varepsilon$ 时，

有：$R(c) < \frac{\varepsilon^2}{2c}$

显然误差项为二阶无穷小。

下面的工作是寻找一个比较接近根值的 c。

对于 $M = \sqrt{(a^2 + b^2)}$，我们设：

$$L = \max\{|a|, |b|\} \tag{7}$$

$$S = \min\{|a|, |b|\} \tag{8}$$

$$t = \frac{S}{L} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

则有：

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{(L^2 + S^2)} \\ &= L\sqrt{(1 + t^2)} \end{aligned}$$

由于 $0 \leqslant t \leqslant 1$，可知：

$$L \leqslant M \leqslant \sqrt{2}L \tag{9}$$

从不等式（9）可以看出这个 c 比较好找，由于文献[1]中所采用的近似公式比较简单，因此可以用它来计算 c。

$$c = L + \frac{S}{3} \tag{10}$$

把（7）、（8）、（10）式代入（5）式，并整理得：

$$M' = L + \frac{5S^2}{3(3L+S)} \tag{11}$$

由于文献[1]算法的相对误差为 5.7%，

即
$$\frac{|M-c|}{|M|} < 5.7\% \tag{12}$$

把(12)式代入(6)式得：

$$R(c) < 0.057^2 \times \frac{M}{2c}$$

故相对误差 $r = \frac{|R(c)|}{|M|} < \frac{0.057^2 \times M}{2c}$

再由(12)式可得：

$$\frac{1}{1+0.057} < \frac{M}{c} < \frac{1}{1-0.057}$$

所以有：

$$r < \frac{0.057^2 \times M}{2c} < \frac{0.057^2}{2(1-0.057)}$$

即
$$r < 0.17\% \tag{13}$$

根据以上的分析，因此我们可以采用（11）式作为幅值算法的近似公式。显然这种方法的计算量较小，且其精度较高，最大相对误差为 0.17%。从上面的推导不难看出，本算法中公式（11）的物理意义相当于用公式（1）求得近似根 c 后，再在根的附近作了一次线性逼近，这样既吸取了公式（1）算法简单的优点，同时又大大提高了精度。

3 该算法在微机中的实现

从公式（11）可以看出，该算法较简单，用汇编语言编程方便，为减少计算时间，可将公式（11）稍作变形：

$$M' = L + \frac{(1+1)S^2 + (1+1)S^2 + S^2}{(L+L+L+S)+(L+L+L+S)+(L+L+L+S)}$$

程序框图如图 1 所示，用 96 单片机汇编语言编写了程序（程序附后），实际计算表明，在时钟为 12MHz 的 8096 单片机上运行，整个求幅值的计算时间约 30μs。表 1 中给出了几种算法的计算精度和计算时间，以供参考。

表 1

参数 \ 算法	文献 1	文献 2	本文算法
计算时间	15μs	33μs	30μs
相对误差	5.7%	1%	0.17%

用 96 汇编语言编写的程序如下：其中，AX=a，BX=b，最后结果送 AX

```
SORT：CMP    AX，   00
      JGE    ADD1
      NEG    AX
```

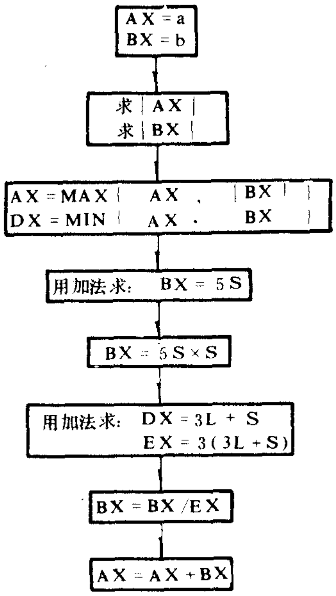

图1 程序框图

```
ADD1：CMP   BX，  ·00
      JGE   ADD2
      NEG   BX
ADD2：CMP   AX，   BX
      JLT   ADD3
      LD    DX，   BX
      SJMP  ADD4
ADD3：LD    DX，   AX
      LD    AX，   BX
ADD4：ADD   BX，   DX，DX
      ADD   BX，   BX
      ADD   BX，   DX
      MULU  BX，   DX
      ADD   DX，   AX
      ADD   DX，   AX
      ADD   DX，   AX
      ADD   EX，   DX，DX
      ADD   EX，   DX
      DIVU  BX，   EX
      ADD   AX，   BX
      RET
      END
```

参考文献

1 胡立华．简化高压输电线计算机阻抗保护计算的方法．继电器，1983，4

2 尹项根．同步发电机定子绕组故障瞬变全过程数字仿真及其微机继电保护新原理的研究博士学位论文，华中理工大学．

3 A. J. Degens，M. Sc，" Microprocesor－Implemented Digital Filters for the Calculation of Symmetrical Components"，IEE. PROC. Vol. 129，Part C，No. 3 May 1982，pp. 111－118.

4 吴建时．单片机快速开平方法．自动化技术，1990

5 刘忠庆．一种汇编语言高速开平方算法的实现方法．自动化技术，1990.

6 李庆扬、王能超、易大义．数值分析．华中理工大学出版社．