

卡尔曼滤波技术及应用

——状态估计中的信号数学模型(连载4)

山东工业大学 于九祥

前面阐述了卡尔曼滤波基本理论,线性滤波的基本概念,以及解决滤波问题的基本方法。下面讨论滤波理论在工程上的应用。卡尔曼滤波的应用领域十分广阔,但是应用卡尔曼滤波的步骤却是基本相同的,大体上是:建立信号数学模型→确定滤波公式→计算机模拟试验→模型的简化→实时计算机实验→正式装定。这也是设计工作的大致过程。由于篇幅的限制,本文只介绍基波分量状态估计中信号数学模型的建立方法,它是实现卡尔曼滤波距离继电器和变压器差动保护的关键。

1 基波信号数学模型

当电力系统发生故障时,电压和电流的波形会发生严重的畸变。目前应用的继电保护原理大部分是以故障后基波分量变化的大小作为动作条件的,因此需要尽快的估计出50Hz分量。利用卡尔曼滤波方法最优地估计基波电压和电流时,必须首先建立信号数学模型,也就是确定,状态方程: $X(k) = \Phi(k)X(k-1) + W(k-1)$ 中的 $\Phi(k)$ 和量测(或观测)方程: $Z(k) = H(k)X(k) + V(k)$ 中的 $H(k)$ 。

下面介绍不同坐标系的两种基波分量状态空间模型。

模型一: 旋转坐标系下的基波分量状态空间模型

这种建立模型的方法是把需要滤取的基波分量用带有未知幅值和相角的相量表示。假定相量是静止的,坐标轴以基频 ω_0 旋转,基波分量可以用下式表示:

$$\dot{S} = A \cdot e^{j\varphi} \quad (1)$$

式中, A 是相量 \dot{S} 的幅值, φ 为相量 \dot{S} 的初相角。假设故障发生在 $t = 0$ 瞬间, 则 $\dot{S} = X_1 + jX_2$, 取状态变量为:

$$X_1 = A \cdot \cos\varphi$$

$$X_2 = A \cdot \sin\varphi$$

因为相量 \dot{S} 是恒定的, X_1 和 X_2 是常数。

对于一个离散的系统来讲,

$$\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

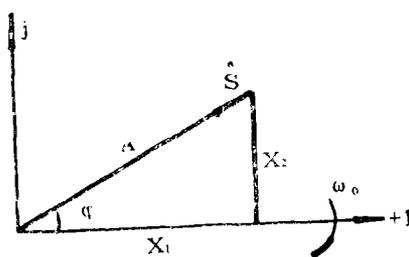


图1 旋转坐标系下的信号 \dot{S} 相量图

状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 为单位矩阵。这就是两状态变量的电压模型。

基波信息的采样值为相量 \dot{S} 在正实轴上的投影，

$$\begin{aligned} \text{即 } Z(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos\varphi \cdot \cos\omega_0 t - A \sin\varphi \sin\omega_0 t \\ &= X_1 \cos\omega_0 t - X_2 \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

取采样周期为 ΔT ，将上式表达成离散形式，

$$Z(k) = X_1(k) \cos(\omega_0 k \Delta T) - X_2(k) \sin(\omega_0 k \Delta T)$$

任何瞬间的测量值包括有效信号加上噪声 $V(k)$ ，噪声包括非基波分量、测量误差和A/D转换器产生的误差。这时，离散的测量值 $Z(k)$ 为：

$$Z(k) = [\cos(\omega_0 k \Delta T) \quad -\sin(\omega_0 k \Delta T)] \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} + V(k) \quad (3)$$

卡尔曼滤波的目的在于以极短的时间从含有非基波分量的暂态信号中精确的估计出 X_1 和 X_2 。

从以上所述不难看出，对于两状态电压模型，它的状态转移矩阵 $\phi(k)$ 和量测矩阵 $H(k)$ 可以表示为：

$$\phi(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H(k) = [\cos(\omega_0 k \Delta T) \quad -\sin(\omega_0 k \Delta T)]$$

这样就构成了故障信息基波电压分量的状态空间模型，即模型1。

由于电流信号含有较大的衰减直流分量，为了提高估计的精确度，增设一个状态变量处理这个直流分量。这样，表示故障相电流信号的三状态卡尔曼滤波器为：

$$\text{状态方程: } \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta \Delta T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k-1) \\ X_2(k-1) \\ X_3(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W(k-1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中， β 是直流分量衰减系数

量测方程：

$$Z(k) = [\cos(\omega_0 k \Delta T) \quad -\sin(\omega_0 k \Delta T) \quad 1] \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{pmatrix} + V(k) \quad (5)$$

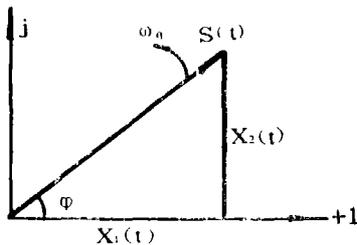


图2 静止坐标系下的信号 $S(t)$ 相量图

对于故障信号中的各次谐波分量，均可用增设状态变量的办法来处理。每次谐波分量可以设立两个状态变量，与处理基波情况相似，显然，这样处理计算工作量较大。为了简化处理，常常把基波以外的所有各次谐波均视为噪声。由于超高压输电线路发生故障时故障信号频谱十分复杂，其噪声信号更接近于白噪声，这种简化处理方法完全可以满足要求。

模型2：静止坐标系下的基波分量状态空间模型

故障信息基波分量在静止坐标系的相量图如图 2 所示。故障信息基波分量的表达式为:

$$S(t) = A \exp [j(\omega_0 t + \varphi)] \quad (6)$$

取信号 $S(t)$ 的实部、虚部为状态变量,

$$X_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$X_2(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

离散系统的表达式为:

$$\text{在 } k \text{ 时刻: } X_1(k) = A \cdot \cos(\omega_0 k \Delta T + \varphi)$$

$$X_2(k) = A \cdot \sin(\omega_0 k \Delta T + \varphi)$$

$$\text{在 } (k+1) \text{ 时刻: } X_1(k+1) = A \cdot \cos[\omega_0(k+1)\Delta T + \varphi]$$

$$= X_1(k) \cos \omega_0 \Delta T - X_2(k) \sin \omega_0 \Delta T$$

$$X_2(k+1) = A \cdot \sin[\omega_0(k+1)\Delta T + \varphi]$$

$$= X_1(k) \sin \omega_0 \Delta T + X_2(k) \cos \omega_0 \Delta T$$

写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \Delta T & -\sin \omega_0 \Delta T \\ \sin \omega_0 \Delta T & \cos \omega_0 \Delta T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} \quad (7)$$

故障信息的采样值为:

$$Z(k) = A \cdot \cos(\omega_0 k \Delta T + \varphi) + V(k) \quad (8)$$

$$\text{或} \quad Z(k) = [1 \quad 0] \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} + V(k) \quad (9)$$

(7)~(9) 式构成了故障信息基波分量的第二种状态空间模型。其中状态转移矩阵为:

$$\varphi(k) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \Delta T & -\sin \omega_0 \Delta T \\ \sin \omega_0 \Delta T & \cos \omega_0 \Delta T \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{量测矩阵为: } H(k) = [1 \quad 0] \quad (11)$$

从各方面性能来看,模型 1 和模型 2 基本相似,模型 1 的实时计算量略小于模型 2,但模型 2 可直观的扩展状态变量。对于二次谐波制动原理的变压器差动保护,可以通过扩展状态变量很方便的滤取二次谐波电流。

2 扩展的信号状态模型

近年来,在二次谐波制动原理的变压器差动保护中,开始应用卡尔曼滤波技术对变压器差动电流中的基波和二次谐波电流进行最佳状态估计,并根据基波和二次谐波电流相对幅值的大小,判别涌流和内部故障情况。这种方法是将差动电流用基波、二次谐波、以及指数衰减的直流分量,加上已知变化的随机噪声之和来模拟。采用五状态变量的卡尔曼滤波器,优化地估计基波和二次谐波电流。利用前面讨论过建立模型二的方法,很容易扩展成五状态变量卡尔曼滤波器,这五个状态变量是,基波与二次谐波中的正弦和余弦分量幅值和按指数规律衰减的直流分量幅值。信号中的高频分量(高于二次谐波的)以测量噪声 $R(k)$ 来模拟。

这样，得到如下的状态空间模型：

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} \cos\omega_0\Delta T & -\sin\omega_0\Delta T & 0 & 0 & 0 \\ \sin\omega_0\Delta T & \cos\omega_0\Delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\omega_0\Delta T & -\sin 2\omega_0\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\omega_0\Delta T & \cos 2\omega_0\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\beta\Delta T} \end{pmatrix} \quad (12)$$

式中， ΔT 为采样周期， ω_0 为基波角频率

$$H(k) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \quad (13)$$

利用前面介绍过的卡尔曼滤波方程组，最优地估计出各状态变量，进而计算出基波和二次谐波电流，如下式：

$$[I_1(k)]^2 = [\hat{X}_1(k)]^2 + [\hat{X}_2(k)]^2 \quad (14)$$

$$[I_2(k)]^2 = [\hat{X}_3(k)]^2 + [\hat{X}_4(k)]^2 \quad (15)$$

式中， $\hat{X}_1(k)$ 、 $\hat{X}_2(k)$ 、 $\hat{X}_3(k)$ 、 $\hat{X}_4(k)$ 为在时间 t_k 的状态变量的估算值。

$I_1(k)$ 、 $I_2(k)$ 为差动电流的基波和二次谐波分量的幅值。

为了防止变压器差动保护在变压器过激磁时误动作，谐波制动中除二次谐波外，还采用了五次谐波制动，因为过激电流中有明显的五次谐波成份。

利用扩展状态空间模型的方法，建立十一维状态变量的卡尔曼滤波器，最优地估计五次谐波电流分量。卡尔曼滤波器的系统状态方程和量测方程为：

$$X(k) = \Phi(k) \cdot X(k-1) + W(k-1) \quad (16)$$

$$Z(k) = H(k) \cdot X(k) + V(k) \quad (17)$$

式中，

$$\Phi(k) = \begin{pmatrix} \varphi(1\theta) & & & & & & & & & & \\ & \varphi(2\theta) & & & & & & & & & 0 \\ & & \varphi(3\theta) & & & & & & & & \\ & & & \varphi(4\theta) & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \varphi(5\theta) \\ & & & & & & & & & & e^{-\beta\Delta T} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(i\theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & -\sin(i\theta) \\ \sin(i\theta) & \cos(i\theta) \end{pmatrix} & i=1, 2, 3, 4, 5, \\ \theta = \omega_0\Delta T \end{cases}$$

$$H(k) = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

用同样的方法可以建立 $(2n+1)$ 维状态变量卡尔曼滤波器，滤取 n 次谐波电流。

3 考虑频率偏差影响时的信号状态模型

前面讨论的基波分量状态估计模型是认为基频 ω_0 为恒定的情况下推导出来的。

T.L. Daniel Hwang等学者的研究成果表明,当 ω_0 有偏差时,基波信号(电压或电流)的相角估计值和无频率偏差时不一样,如图3所示。为了精确的计算故障阻抗,需要建立有频率偏差影响的基波分量状态模型,这一点对于研究电力系统振荡过程中的短路尤为重要。

根据已研究的结果表明,频率偏差是和相角的平均变化率线性相关的,即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ (rad/sec)} = \pi \Delta f \text{ (Hz)}.$$

对于(1)式表示的信号,当基波频率变化 $\Delta\omega$ 时,信号在正实轴上的投影为:

$$Z(t) = A \cdot \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi] \quad (18)$$

采用前面介绍的模型一方式建立状态空间模型,取状态变量 $X_1 = A \cdot \cos\varphi, X_2 = A \cdot \sin\varphi$,再扩展一个状态变量 X_3 表示频率偏差 Δf ,则:

$$Z(t) = X_1 \cos(\omega_0 t + 2\pi X_3 t) - X_2 \sin(\omega_0 t + 2\pi X_3 t) \quad (19)$$

离散形式的量测方程为:

$$Z(k) = h_k(X) + V(k) \quad (20)$$

式中, $h_k(X) = X_{1k} \cos(\omega_0 k \Delta T + 2\pi X_{3k} k \Delta T) - X_{2k} \sin(\omega_0 k \Delta T + 2\pi X_{3k} k \Delta T)$

系统状态方程类似于(16)式,状态变量 X_1, X_2 和 X_3 为常数,因此,状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 为 3×3 的单位矩阵,离散形式的系统状态方程为:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_{k-1} \quad (21)$$

卡尔曼滤波递推方程稍许不同于线性卡尔曼滤波器模型,表现在:

(1) 卡尔曼滤波器增益:

$$k_k = p_{\tilde{x}} H_k^T (\hat{X}_{\tilde{x}}) [H_k (\hat{X}_{\tilde{x}}) p_{\tilde{x}} H_k^T (\hat{X}_{\tilde{x}}) + R_k]^{-1} \quad (22)$$

式中,

$$H_k (\hat{X}_{\tilde{x}}) = \left. \frac{\partial h_k(X)}{\partial X_k} \right|_{X_k = \hat{X}_{\tilde{x}}}$$

$\hat{X}_{\tilde{x}}$ 为预测估计值,它等于 $\phi(k) \cdot \hat{X}(k-1)$,常常用 $X(k|k-1)$ 表示。

(2) 状态估计修正:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{\tilde{x}} + k_k [Z_k - h_k(\hat{X}_{\tilde{x}})] \quad (23)$$

(3) 误差协方差修正:

$$p_k = p_{\tilde{x}} - k_k \cdot H_k (\hat{X}_{\tilde{x}}) p_{\tilde{x}} \quad (24)$$

(下转58页)

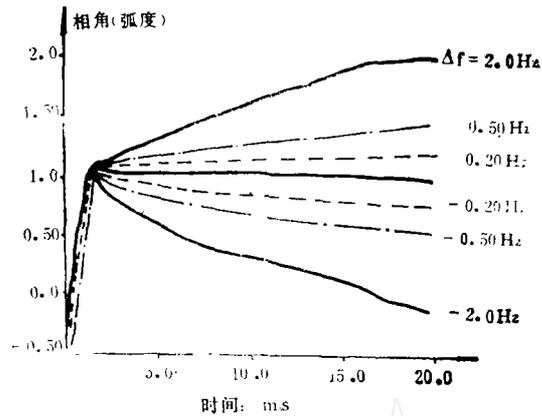
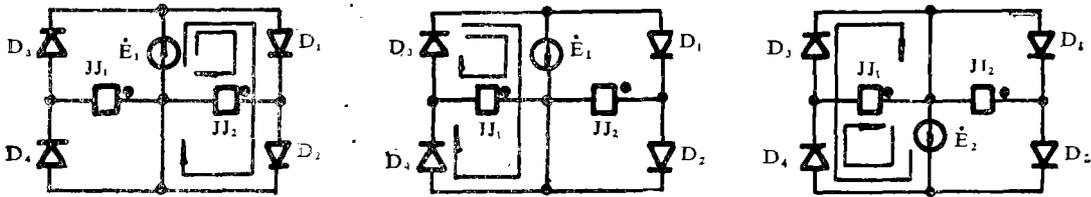


图3 用模型1估计的相角和频偏关系

首先将图2a的LH—15A阻抗继电器测量元件比较回路原理图进行简化，以0为参考点，从b、c点看可简化为图2b、图2c的等效电路。其中 \dot{E}_1 为动作量电压 ($\dot{U}_K - \dot{U}_Y + \dot{U}_J$)、 \dot{E}_2 为制动量电压 ($\dot{U}_K - \dot{U}_Y - \dot{U}_J$)。

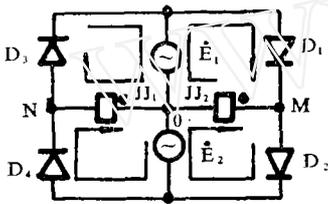
由于采用了整流电路，我们有理由用分析恒定直流电路的方法来定性分析此脉动直流电路。



(a) 为 \dot{E}_1 单独作用时正半周电流回路

(b) 为 \dot{E}_1 单独作用时负半周时电流回路

(c) 为 \dot{E}_2 单独作用时正半周电流回路



(d) 为 \dot{E}_2 单独作用时负半周电流回路

图 3

(e) 为合成电流回路图

采用迭加原理来分析继电器支路电流、如图3所示。从图3a、b图可看出动作量 \dot{E}_1 产生的电流不论正负半周总是从继电器的极性端流入，另有一小部分从制动回路分流，且被制动回路二极管限幅。

同理，制动量 \dot{E}_2 产生的电流总是从继电器的非极性端流入，另有小部分经动作量回路分流，同时被动作量回路二极管限幅。图3e为图3a、b、c、d图的合成。从图3e可看出此种电路纯属双半波环流比较回路，M、N点间是差回路，它与图1中的两个整流桥组成的环流比较回路道理完全一样，只是整流桥的形式与极化继电器的接法作以改变罢了。

.....

(上接77页)

应用方式(20)和(22)时， $H_x(\hat{X}_x)$ 的三个分量定义为：

$$H_{11x} = \cos(\omega_0 k \Delta T + 2\pi \hat{X}_{3x} \cdot k \Delta T) \quad (25)$$

$$H_{12x} = -\sin(\omega_0 k \Delta T + 2\pi \hat{X}_{3x} \cdot k \Delta T) \quad (26)$$

$$H_{13x} = 2\pi (H_{12x} \hat{X}_{1x} - H_{11x} \hat{X}_{2x}) k \Delta T \quad (27)$$

对于考虑频率偏差影响的三状态非线性卡尔曼滤波器，计算工作量加大了。当频率偏差不大时，为了简化起见，一般不考虑其影响。(未完)