讲 座

卡尔曼滤波技术及应用

——卡尔曼滤波器系统模型的建立方法(连载1)

山东工业大学 于九祥

1 卡尔曼滤波问题的提出

实践中为了达到某种工程目的，常常需要得到某种信号的精确量值，然而能够量测到的信号往往夹杂着噪声信号。为了有效地提取有用信息，人们研究了各种方法。六十年代初形成的最佳线性递推滤波，即卡尔曼滤波，把滤波理论推进到一个崭新阶段。当时是应用在航空领域里，例如飞机或导弹在运动过程中，往往受到随机干扰的作用，不能直接得到形成最优控制规律所需的状态变量。如飞机或导弹的位置、速度等状态变量都是无法直接得到的。需要通过雷达或别的测量装置进行观测，根据观测到的信号来确定飞机或导弹的状态变量。在雷达或别的测量装置中都存在随机干扰的问题，因此在观测得到的信号中往往夹杂有随机噪声。我们要从夹杂有随机噪声的观测信号中分离出飞机或导弹的运动状态变量。要想准确得到这些状态变量是不可能的，只能根据观测信号来估计或预测这些状态变量。根据估计或预测得到的状态变量来形成最优控制规律。

卡尔曼滤波扩充了经典滤波理论(即维纳滤波理论)的适用范围，即从平稳随机过程扩充到非平稳随机过程。同时，卡尔曼滤波提供了适合于在计算机上进行实时计算的递推公式。这就为滤波器的工程实现开辟了广阔前景。正是由于这些优点，促进了卡尔曼滤波理论的广泛应用。目前它的应用已经遍及国防和国民经济的许多领域。除了在通讯和控制这两大领域以外，它还被成功的应用到生物工程、社会经济系统、学习系统和各类识别问题中。八十年代初期，以美国控制理论专家R·G·Brown和继电保护专家A·A·Girgis为代表的研究小组，在输电线路故障感应噪声模拟、距隔保护的卡尔曼滤波算法以及故障分类的自适应卡尔曼滤波方面进行了研究，从此卡尔曼滤波理论在电力系统继电保护方面得到了应用。

传统的继电保护原理是建立在工频电气量的基础上。卡尔曼滤波的出发点是将故障信号中的基频分量看成是有效成份，而将故障信号中的高次谐波、低次谐波以及衰减的非周期分量均作为噪声来处理。从含有噪声的测量中，通过不断的“预测—修正”运算最优的估计出50Hz电流和电压相量。对于二次谐波制动原理的保护可以采用增加状态变量的办法滤取二次谐波以及所需要的其他谐波分量。这种滤波技术利用参数变化的随机性和先验统计特性，大大提高了估计的准确性。在微机保护中，应用概率统计和随机控制理论的方法，是对常规继电保护原理上的一个突破，并为继电保护新原理的研究开辟了一条途径，可望使继电保护的性能有较大的改观。

2 系统、噪声、滤波

为了更好的理解卡尔曼滤波，我们将有关滤波的一些概念作一下解释。

2.1 系统描述

为要具备任何类型的滤波问题，首先必须有一个系统，通常为动态系统，且系统的量测量可供利用，它的行为通常可以用方程描述。因为系统运行在实时状态，所以方程中的自变量是时间。此外，系统可能运行于离散时间状态或连续时间状态，并且以差分方程或微分方程作为其基本描述方程，在形式上与数学模型等同，而其输出量则可能变化于离散时刻或连续时基上。

在讨论滤波时，隐含着所讨论的系统是有噪声的。噪声可能由各种途径产生，在电力系统短路过程中，除基波分量以外的所有暂态成份都可以看成噪声。系统的输出量是借助于各种传感器获得。这些传感器在通常的随机噪声的基础上，又会使系统输出量的量测值造成一定误差。假设这里存在着某个与系统运行有关的量（可能是矢量），我们希望知道这个量在每一个瞬时的值。为了便于讨论，假设被研究的系统是连续时间系统，并且用S（·）表示所讨论的量。这个量可能不能直接量测到，或者说它只能和误差一起被量测得到。在任何情况中，我们都假设有噪声的量测量Z（·）是可以得到的，而Z（·）和S（·）是不同的。

滤波作为一个一般的术语，它表示从Z（·）恢复S（·），或逼近S(·)，或从Z(·）获得关于S（·）的信息。换句话说，用系统的带噪声的量测量来获得系统的某一基本参量的有关信息。

我们的注意力是离散时间系统，或者等效的说，集中到其基本系统方程为差分方程而不是微分方程的系统上。因为在实际情况中，对系统的观测和控制决策的实施经常是在离散时刻上进行的，所以推动了对离散系统的研究。我们研究的离散时间系统，作为一种模型它是一种线性有限维系统，如图1所示。

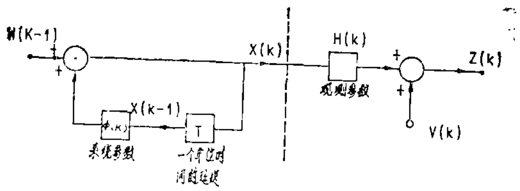


图1 作为信号模型的有限维线性系统

这个系统可以用下列状态方程和输出方程（观测方程）描述

$$X(k)=\phi(k)X(k-1)+W(k-1) \tag{1}$$

$$Z(k)=H(k)X(k)+V(k) \tag{2}$$

式中 W（k－1）——系统的随机扰动输入；V（k）——系统的量测噪声；

Z(k)——系统的量测输出；X（k）——系统的状态，X（0）表示系统的初始状态，一般情况下x（0）是随机向量。我们采用 {X（k）} 表示系统未知状态集合，通常X(k）为 {X（k）} 在k时刻的取值，即为k时刻的系统状态。在正常情况下，Z（k）= H（k）X（k）应是相应系统的输出，但是现在这种情况中，在 {Z(k)} 上又增加了噪声过程 {V （k）}，它是在量测过程 {Z（k）} 中产生的。如果有了 {V（k）} 和 {W（k－1）} 的详细内容，就能为导出图1的完整模型提供条件。

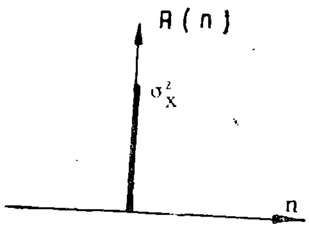
2.2 噪声描述

{V（k）} 和 {W（k）} 都是噪声过程，{V（k）} 称为"量测噪声"序列，{W（k）} 称为"过程噪声"序列。如果不选定某种类型的概率结构作为噪声过程 {V（k）} 和 {W（k）} 的话，要完成最小方差的估计几乎是不可能的。为此我们作如下的假设：

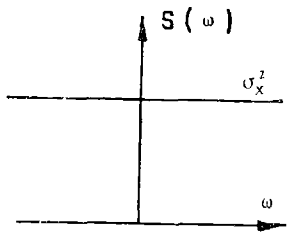
假设1、{V（k）} 和 {W（k）} 均为白噪声序列。白噪声序列实际是一个独立的随机序列，或者可以理解成一个纯随机序列，即任意相邻时刻的取值都是不相关的。白噪声序列的功率谱密度，可以按 $S(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}R(n)Z^{-n}$ 计算。

白噪声的相关函数为：$R(n)=\begin{cases}\sigma_x^2, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$

所以 $S(z)=R(0)=\sigma_x^2=$ 常数，如果令 $Z=e^{j\omega}$，则 $S(z)$ 可以完成频率 ω 的函数，而且 $S(\omega)=$ 常数。白噪声序列的相关函数和功率谱密度函数如图2所示。



（a）白噪声序列的相关函数



（b）白噪声序列的功率谱密度

图2 白噪声序列的统计特性

白噪声序列的谱密度在各个频率上有相同的分量，正象白光一样，等量地包含了各种有色光的光频分量。

白噪声序列是独立的随机序列，与此相对应的有色噪声序列则是一种相关的随机序列，例如：

$$y(k)=0.8y(k-1)+r(k)$$

式中，{r（k）} 是白噪声序列。y（k）在某种程度上依赖于其前一个时刻的值，所以是一个有色噪声序列。纯粹的白噪声过程很难达到，但很多随机序列可以用白噪声序列近似，这样可使问题的处理简化。我们通过仿真运算发现，在输电线路的不同点发生短路，{W(k)} 和 {V(k)} 接近于白噪声序列的程度是不同的，在靠近电源侧发生短路更接近于白噪声。因此利用卡尔曼滤波进行状态估计误差较小，均小于3％。在保护区末端发生短路时，{W（k）} 和 {V（k）} 近似于白噪声的程度差一些，状态估计的误差约4％～5％。

假设2．{V（k）} 和 {W（k）} 分别为零均值，即E〔V（k）〕＝E〔W（k）〕＝0，{V（k）} 和 {W（k）} 之间互相独立，且具有已知协方差的高斯过程。

协方差表示两个随机向量（或一个随机变量的不同时刻）的相互关系的数字特征，设n维随机向量X和m维随机向量Y的联合概率密度为p(X，Y)，我们定义它们的协方差矩阵。

产品介绍

ZGT—3型电气化铁道BT供电方式故障探测装置

许昌继电器研究所　　廖泽友　陈爱钦

1　概述

近年来。我国电气化铁道迅速发展，由于列车运行的流动性，电铁牵引网故障频繁，而铁路运行生产一刻都不能中断，这就需要精度高的故障探测装置。ZGT—3型电铁BT供电方式故障探测装置是许昌继电器研究所最新研制出的集成电路型故障探测装置，其各项技术指标均不低于目前国内电气化铁道所安装的日本东芝公司的LX—5F型故障探测装置。且在如下两方面优于进口产品。

1.1 克服了LX—5F型装置计量显示故障点距离，仅能显示成占线路总长的百分数的缺点，可以根据用户的需要分别设置成显示故障点距离的百分数或显示故障点距离的公里数。设置简单、灵活，不需改动装置的内部线路。

COV（X，Y）为如下的n×m矩阵：

$$COV(X, Y) = E(X-EX)(Y-EY)^T$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(X-EX)(Y-EY)\,p(X, Y)\,dXdY$$

显然 $COV(Y, X) = COV(X, Y)^T$。由此定义可知，一个随机向量的方差阵，其主对角线元是各分量的方差，而其第 i 行第 j 列元（$i \neq j$）则是第 i 分量和第 j 分量的协方差。

根据假设1，当 $k \neq L$ 时对于任意的K和L，V（k）和V（L）是独立的随机变量，且W（k）和W（L）也是独立的随机变量。因此对应于所有的K和L，{V（k）}过程的协方差为：

$$E[V(k)-EV(k)][V(L)-EV(L)]^T = R(K)\delta_{KL} \quad (3)$$

式中，$\delta_{KL} = \begin{cases} 1, & 当k = L \\ 0, & k \neq L \end{cases}$

δ_{KL}称为狄拉克（Dirac）δ函数，R（k）δ乘$_{KL}$后表示R（k）在时间上前后不相关。同样，具有零均值的{W（k）}过程的协方差，完全由矩阵序列{Q（k）}确定，它使得：

$$E[W(K)-EW(k)][W(L)-EW(L)]_T = Q(k)\delta_{KL} \quad (4)$$

根据假设2，{V（k）}和{W（k）}互相独立，这就意味着对于所有的K和L有：

$$E[V(k)-EV(k)][W(L)-EW(L)^T = 0$$

为了方便，我们可以把有关{V（k）}和{W（k）}的假设概括如下：

过程{V（K）}和{W（k）}是零均值、独立的白噪声和过程，且协方差由（3）式和（4）式给定、式中的R(K)和Q(k)都是方差阵，是衡量输入噪声（也称动态噪声）和观测噪声大小的重要参数，它们的确定方法将在以后的内容里介绍。　　（待续）