

# 用回归直线采样法测量交流电量

上海交通大学 提兆旭 吴寿仁

**摘要:** 本文提出了测量正弦信号的幅值和周期的方法——回归直线测量法。对正弦信号进行采样,并将采样点回归成直线,其直线斜率与信号幅值成比例,由此测量幅值。回归直线过正弦信号的零点,由此可测出信号的周期。本文讨论了两种方案:1)在正弦信号过零点以后的上升或下降沿进行采样,利用对称性原理进行回归;2)将正弦函数绝对值化,考虑采样不从过零点开始,并得出递推公式。最后讨论含有衰减直流分量的一种数学模型,求稳态正弦分量幅值的方法。本方法在有谐波存在的情况下,选择合适的采样点数和采样周期,结果是令人满意的。本方法的时间窗较短。

**关键词** 回归直线采样测量法 对称性原理 递推公式

## 一 前言

回归直线采样测量法是一种随机模型。

参考文献<sup>[1]</sup>讨论了其测量原理。文中提出在正弦电压波形的上升沿或者下降沿的零点附近,正弦函数值之间有着近似线性关系,因此在零点附近对称地采样,通过求回归直线的斜率来求幅值,而相邻的回归直线过零时间间隔可决定被测电压周期,并在实际中得到应用。其实本方法测量正弦信号的幅值和周期,并不要求函数值之间是否有近似线性关系,而且采样也并不一定要求信号过零两侧对称地采样。对于回归直线测量法本文探讨了采样不一定要求从过零点开始,也不一定要求是对称地采样,然而却利用对称性原理进行求算,得到了满意的结果,并得到递推公式。本文还发展了回归直线测量方法的原理,提出对于含有衰减直流分量的某一种数学模型,求稳态正弦分量幅值的方法。本方法在实际中可以有广泛的应用,对它进行探讨是很有意义的。

## 二 回归直线测量法的原理

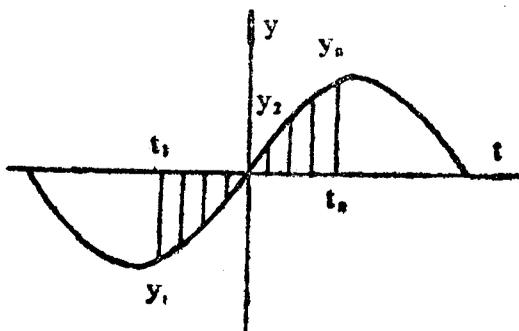


图1  $y = E \sin \omega t$

如图1,在正弦信号的上升沿或下降沿的零点附近,对称地采样 $n$ 个点,然后用一回归直线来拟合。

测量原理如下:

设回归直线方程为:

$t = a + by$ , 则:

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{t} - b\bar{y} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^n (t_i + \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \end{aligned} \right\} \text{式(1)}$$

其中  $t_i$  为第  $i$  次采样点的时间，  
 $y_i$  为第  $i$  次采样点的读值，

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

由于正弦函数的原点对称性，所以  $\bar{y} = 0, \bar{t} = 0$ 。则：

$$t = by$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (2)$$

将  $y_i = E(\sin \alpha_i + V)$ ， $t_i = \alpha_i T$  代入 (2) 式的  $b$  中，则回归直线斜率：

$$b' = \frac{1}{b} = \frac{E^2 \sum_{i=1}^n (\sin^2 \alpha_i + \sigma^2)}{TE \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \alpha_i} = KE \quad (3)$$

其中  $K = \text{常数}$

$\sigma = \text{常数}$ ，为测量读值方差。

由于是对称采样，所以回归直线与正弦信号的零点重合，两条相邻直线的过零时间间隔决定周期  $T$ 。回归直线的斜率  $b'$  不受频率变化的干扰，回归直线反映的是这些采样点之间的总体变化趋势，而不是个别数据的变化情况，所以各种随机性干扰造成的采样点左右偏移对回归直线（过零点和斜率）不会带来多大的影响。通过计算机仿真计算，系统中的谐波对测量的影响，通过选择恰当的采样周期和采样点数，可以大大削弱。

下面再分两种情况讨论。

(一) 在正弦信号过零开始进行采样。

如图 2，假设过零以前的采样点的时间和读值分别为  $\bar{t}_i^-$ 、 $\bar{y}_i^-$ ，过零之后则为  $\bar{t}_i^+$ 、 $\bar{y}_i^+$ 。

由正弦信号的原点对称性，得  $\bar{t}_i^- = \bar{t}_i^+$ ， $\bar{y}_i^- = -\bar{y}_i^+$ ， $(\bar{y}_i^-)^2 = (\bar{y}_i^+)^2$ 。将它们代入 (2)

式得:

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\sum_{i=1}^{n'} (t_i^- y_i^- + t_i^+ y_i^+)}{\sum_{i=1}^{n'} [(y_i^-)^2 + (y_i^+)^2]} = \frac{2 \sum_{i=1}^{n'} t_i y_i}{2 \sum_{i=1}^{n'} (y_i)^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^{n'} t_i y_i}{\sum_{i=1}^{n'} (y_i)^2} \quad (n' = \frac{1}{2}n) \quad (4)
 \end{aligned}$$

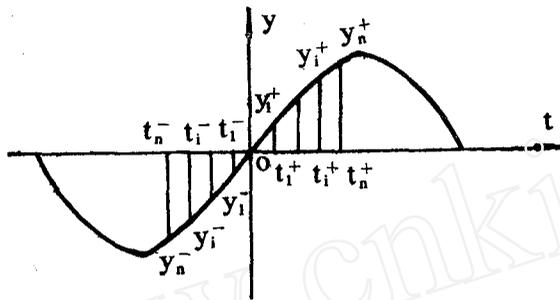


图 2

上式可得只需从过零点开始采样,就可得到满意的结果,而且回归直线通过正弦信号的过零点,两条回归直线的过零时间间隔决定信号周期。

利用这种方式所测得的正弦信号幅值的误差很小。通过计算机仿真计算,在谐波与基波的相位差为 $0 \sim T$  ( $T$ 为谐波周期)每隔 $0.2\text{ms}$ 算一次,所得的最大可能误差以及此误差与谐波含量的比。如表 1。从表 1 数据中可以看出,对于一定的谐波含量,随着采样点数的增加,谐波对测量的影响减小比较大。但考虑时间窗,采样点数也不能选得太大。对于采样点数不变,谐波含量增大误差会增大。从误差与谐波含量之比来看,对于某一采样点数,随着谐波含量的增加,这个比值稍微有增加,但不同的采样点数,这个比值变化较大。这个比值基本上反映了采样点数对测量结果的影响,比值越大,影响越大,反之亦然。再对照五次谐波和七次谐波对测量的影响,从表 1 上可以看出七次谐波对测量的影响比五次谐波要小。这种情况的时间窗较小,若取 9 个采样点,时间窗只有 $4.5\text{ms}$ 。

#### (二) 不从正弦信号过零点开始采样

为了方便,将正弦信号绝对值化,如图 3,又考虑采样初相角 $t_0$ ,  $y = E |\sin \omega(t + t_0)|$ 将 $y$ 延拓成关于原点 $O$ 对称的 $y'$ , 即 $y' = -E |\sin \omega(t + t_0)|$   $y$ 上的一组采样点 $(t_1, y_1)$ ,  $(t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n)$ , 在 $y'$ 上可找到与之对称的一组点 $(t_1', y_2')$ ,  $(t_2', y_1')$ ,  $\dots, (t_n', y_n')$ , 将这 $2n$ 个点回归成直线, 直线过原点 $O$ , 但不经过正弦信号的零点。将 $y_i = E |\sin \omega(t_i + t_0)|$ 代入(2)式, 同样可得 $b' = KE$ ,  $K$ 为常数。

表 1

	谐波含量	采样点数 n						
		4	5	6	7	8	9	
谐波存在时引起的测量误差最大百分比	五次谐波	1%	1.61%	1.13%	0.78%	0.52%	0.33%	0.202%
		2%	3.24%	2.27%	1.58%	1.06%	0.678%	0.421%
		3%	4.87%	3.43%	2.40%	1.62%	1.05%	0.656%
		4%	6.50%	4.59%	3.24%	2.24%	1.44%	0.91%
		5%	8.15%	5.77%	4.09%	2.82%	1.84%	1.18%
	七次谐波	1%	1.17%	0.668%	0.370%	0.262%	0.244%	0.220%
		2%	2.37%	1.37%	0.767%	0.550%	0.512%	0.457%
		3%	3.60%	2.11%	1.19%	0.865%	0.802%	0.712%
		4%	4.85%	2.89%	1.64%	1.21%	1.11%	0.984%
		5%	6.13%	3.69%	2.12%	1.57%	1.45%	1.27%
误差与谐波含量之比	五次谐波	1%	1.614	1.130	0.780	0.519	0.329	0.203
		2%	1.619	1.136	0.790	0.530	0.339	0.210
		3%	1.622	1.142	0.780	0.541	0.349	0.219
		4%	1.626	1.148	0.809	0.552	0.359	0.227
		5%	1.629	1.154	0.818	0.563	0.369	0.235
递增量		0.005	0.006	0.01	0.011	0.010	0.008	
误差与谐波之比	七次谐波	1%	1.170	0.668	0.370	0.262	0.244	0.220
		2%	1.184	0.686	0.384	0.275	0.256	0.228
		3%	1.191	0.704	0.397	0.288	0.267	0.237
		4%	1.213	0.721	0.411	0.301	0.279	0.246
		5%	1.226	0.739	0.424	0.315	0.290	0.255
递增量		0.014	0.018	0.013	0.013	0.011	0.009	

注：表 1 的数据是在采样周期为 0.5ms 得出的，采样的正弦信号过零点开始。

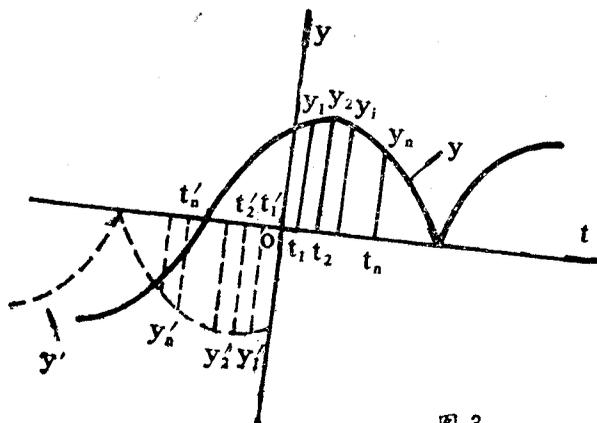


图 3

通过计算机仿真计算, 在没有谐波, 也没有随机性干扰的情况下, 对于任何大于奈奎斯频率的采样频率和采样点数, 完全没有测量误差。对于有谐波存在时, 采样周期和采样点数一定时, 采样初相角在 $0\sim 10\text{ms}$ , 基波与该次谐波相位角 $T_1=0\sim T$  ( $T$ 为该次谐波周期), 存在一最大测量误差, 这个最大误差与该次谐波含量之比, 随谐波含量增大趋势, 但增长幅度很小, 表2的数据在采样周期为 $1\text{ms}$ 得来的。从表2数据来看, 采样点数不变, 随着谐波含量增大, 误差增大, 误差与谐波含量之比也增大, 但幅度很小, 这个比值基本上由采样点数及采样周期决定了。比值越小, 说明这个采样点数及采样周期选得越好。从表2还可以看出, 在同样的采样点数及谐波含量, 七次谐波的误差及误差与谐波含量之比均比五次谐波的小, 说明谐波次数越高对测量结果的影响越小。

表 2

	谐波含量	采样点数 n						
		7	8	9	10	11	12	
谐波存在时引起的测量误差最大百分比	五次谐波	1%	1.15%	0.90%	0.71%	0.69%	0.52%	0.48%
		2%	2.35%	1.86%	1.45%	1.40%	1.05%	0.97%
		3%	3.68%	2.83%	2.22%	2.15%	1.64%	1.5%
		4%	4.86%	3.83%	3.01%	2.95%	2.24%	2.06%
		5%	6.17%	4.85%	3.84%	3.73%	2.87%	2.65%
	七次谐波	1%	1.04%	0.74%	0.55%	0.507%	0.429%	0.357%
		2%	2.12%	1.51%	1.126%	1.04%	0.886%	0.744%
		3%	3.24%	2.31%	1.72%	1.50%	1.37%	1.16%
		4%	4.4%	3.13%	2.34%	2.18%	1.88%	1.61%
		5%	5.605%	3.99%	2.97%	2.79%	2.45%	2.08%
误差与谐波含量之比	五次谐波	1%	1.153	0.920	0.718	0.687	0.518	0.480
		2%	1.173	0.931	0.724	0.701	0.532	0.485
		3%	1.193	0.944	0.739	0.717	0.545	0.499
		4%	1.214	0.957	0.753	0.732	0.559	0.514
		5%	1.235	0.97	0.768	0.747	0.573	0.529
递增量		0.020	0.012	0.015	0.015	0.014	0.015	
误差与谐波含量之比	七次谐波	1%	1.039	0.741	0.553	0.507	0.429	0.357
		2%	1.059	0.755	0.563	0.520	0.443	0.372
		3%	1.079	0.769	0.573	0.532	0.457	0.387
		4%	1.10	0.783	0.564	0.545	0.471	0.402
		5%	1.121	0.797	0.594	0.558	0.485	0.417
递增量		0.020	0.014	0.010	0.013	0.014	0.015	

注: 表2数据是在采样周期为 $1\text{ms}$ 、初相角为 $0\sim 10\text{ms}$ 谐波与基波相位差从 $0\sim T$  ( $T$ 为谐波周期)得到的。

比较表 1、表 2 可知, 这种情况比过零点开始采样需要的采样点数更多, 时间窗更大, 而且谐波对测量的影响也更大。

为了便于计算机计算, 下面来讨论这种情况的递推公式。

将  $y_i = E |\sin \omega(t_i + t_0)|$  代入 (2) 式得:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i E |\sin \omega(t_i + t_0)|}{E \sqrt{\sum_{i=1}^n \sin^2 \omega(t_i + t_0)}}$$

$$\text{推得, } E = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i^2) [\sum_{i=1}^n t_i |\sin \omega(t_i + t_0)|]}{(\sum_{i=1}^n t_i y_i) (\sum_{i=1}^n \sin^2 \omega(t_i + t_0))} \quad (5)$$

如果是等间隔  $AT$  采样,  $AT$  为采样周期, 则:

$$E = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i^2) [(\sum_{i=1}^n i |\sin \omega(t_i + t_0)|)]}{(\sum_{i=1}^n i y_i) [\sum_{i=1}^n \sin^2 \omega(t_i + t_0)]} \quad (6)$$

$$\text{设 } Z_1(n) = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$Z_2(n) = \sum_{i=1}^n i y_i$$

$$Z_3(n) = \sum_{i=1}^n \sin^2 \omega(t_i + t_0) \quad (7)$$

$$Z_4(n) = \sum_{i=1}^n i |\sin \omega(t_i + t_0)|$$

$$Z_5(n) = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$Z_6(n) = \sum_{i=1}^n |\sin \omega(t_i + t_0)|$$

$$\text{则 } E = Z_1(n) \cdot Z_4(n) / (Z_2(n) Z_3(n)) \quad (8)$$

增加一个采样点  $y_{n+1}$ , 为了保持是  $n$  个采样点, 需将第一个采样点  $y_1$  去掉, 以后各点前移一点, 这样就得到递推公式如下:

$$Z_1(n+1) = Z_1(n) - y_1^2 + y_{n+1}^2$$

$$Z_2(n+1) = Z_2(n) + n y_{n+1} - Z_2(n)$$

$$Z_3(n+1) = Z_3(n) - \sin^2 \omega(t_1 + t_0) + \sin^2 \omega(t_{n+1} + t_0) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
Z_4(n+1) &= Z_4(n) + n \sin \omega (tn+1+t_0) 1 - Z_4(n) \\
Z_5(n+1) &= Z_5(n) - y_1 + y_{n+1} \\
Z_6(n+1) &= Z_6(n) - |\sin \omega (t_1+t_0)| + |\sin \omega (tn+1+t_0)| \\
E &= Z_1(n+1) \cdot Z_4(n+1) / (Z_2(n+1) \cdot Z_3(n+1)) \quad (10)
\end{aligned}$$

这里进行运算的是第二点到第 $n+1$ 点, 这样递推并没有增加乘除运算次数, 然而给计算机在线控制带来很大方便。

#### 四 对衰减直流分量的处理

如果测量的对象含有衰减的直流分量, 也含有衰减的周期分量, 只要建立适当的数学模型, 利用本方法也是可以测量稳态的周期分量以及各个分量, 假定数学模型为:

$$\begin{aligned}
Y &= Ae^{-\frac{t}{T_0}} + E(1+K_1e^{-\frac{t}{T_d'}} + K_2e^{-\frac{t}{T_d''}}) \sin(\omega t + \beta) \\
A &= KE + C \quad (11)
\end{aligned}$$

其中  $E$  为稳态周期分量;

$K_1$ 、 $K_2$ 、 $K$  是比例系数, 是已知常数;  $C$  为常数;

$T_0$ 、 $T_d'$ 、 $T_d''$  是时间常数, 已知的。

将此模型变换如下:

$$\begin{aligned}
Y &= (kE + C)e^{-\frac{t}{T_0}} + E(1+K_1e^{-\frac{t}{T_d'}} + K_2e^{-\frac{t}{T_d''}}) \sin(\omega t + \beta) \\
Y &= Ce^{-\frac{t}{T_0}} = E \left[ (1+K_1e^{-\frac{t}{T_d'}} + K_2e^{-\frac{t}{T_d''}}) \sin(\omega t + \beta) + Ke^{-\frac{t}{T_0}} \right] \quad (12)
\end{aligned}$$

设  $Y_1 = Y - Ce^{-\frac{t}{T_0}}$  则:

$$Y_1 = F \left[ (1+K_1e^{-\frac{t}{T_d'}} + k_2e^{-\frac{t}{T_d''}}) \sin(\omega t + \beta) + ke^{-\frac{t}{T_0}} \right] \quad (13)$$

对于每一个采样点  $y_i$ , 减去  $ce^{-\frac{t}{T_0}}$  就得到  $y_{1i}$ , 可以将  $y_{1i}$  对称延拓成一关于原点对称的奇函数, 利用对称性 (参照三 (二) 部分), 可以推出  $y_{1i}$  的回归直线斜率  $b' = K'E$ ,  $K'$  为常数, 由此求得  $E$ 。

对于别的含有衰减直流分量的数学模型, 处理方法是一样的。请注意, 只要数学模型是精确模型, 利用这种处理方法, 就可以得精确的结果。

#### 五 总 结

利用本方法可以测量正弦信号的幅值, 也可测量其周期。幅值  $E = \frac{b'}{K}$ , 周期由两条回归直线过零时间间隔决定 (指第一种情况)。回归直线 (过零点和斜率) 不受频率变化的影响, 随机性干扰对它的影响很小。从过零点开始采样, 回归直线受谐波的影响不