

# 半周波富氏算法及其修正方法的研究

东北电力学院 张连斌

## 一 前言

富氏变换是目前在微机保中应用最多的一种算法。由于运算简单且有很强的抑制直流分量和谐波分量的能力。所以在国内外已得到了广泛的应用。但全周波富氏算法有两个问题：①数据窗较长。为了保证精度一般取一个周波的采样值，对于快速保护不能满足要求。②在短路的暂态过程中，在衰减的非周期分量的作用下精度不佳。对于快速保护必须考虑采用适当的方法尽可能消除非周期分量对计算精度的影响。本文就是针对上述两个问题提出通过在线求取衰减的非周期分量对采样数据进行修正的半周波富氏算法，通过仿真结果表明本文所提出的方法具有数据窗短，精度高且不受衰减的非周期分量影响等优点，是一种非常实用的算法。

## 二 半周波富氏算法

如果信号 $x(t)$ 满足狄里赫莱条件，则 $x(t)$ 可写成：

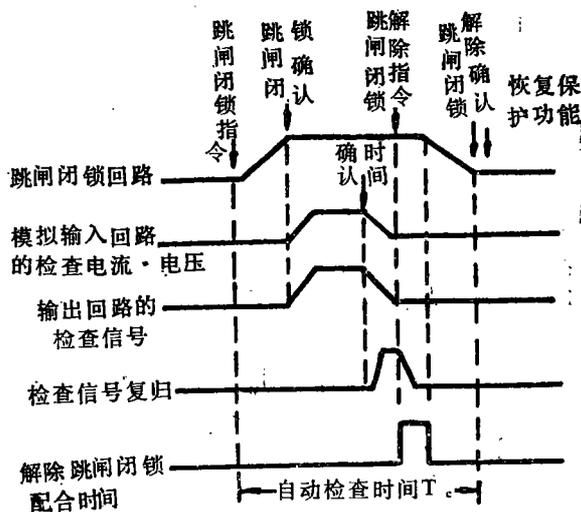


图4 微机保护中自动检查时的时间图

$$\begin{aligned} * \text{动作可靠性} &= \frac{\text{继电器投入系统且能正确发挥保护功能的时间}}{\text{继电器投入系统的时间}} \\ &= 1 - \frac{\text{继电器存有妨碍保护功能的故障而仍投入系统的时间}}{\text{继电器投入系统的时间}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' \cos \omega_k t + b_k' \sin \omega_k t) \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\omega_k t + \theta_k)
 \end{aligned}$$

$$\text{令: } x_{c,i} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_i t dt$$

根据三角函数的正交性上式结果只剩  $i = k$  项

$$\begin{aligned}
 \text{即 } x_{c,i} &= \frac{2}{T} a \int_0^T [\sin(\omega_i t + \theta_i) \sin \omega_i t] dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{a_i}{2} \int_0^T [\cos \theta_i - \cos(\omega_i t + \theta_i)] dt \\
 &= a_i \cos \theta_i
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } x_{s,i} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_i t dt$$

同理可推出:

$$x_{s,i} = a_i \sin \theta_i$$

由此可知:  $a_i = \sqrt{x_{c,i}^2 + x_{s,i}^2}$  即  $i$  取不同的值可以从信号  $x(t)$  中提取  $i$  次谐波的幅值。这即是全周波的富氏算法。

如果取积分区间为半个周波即  $T/2$ , 即为半周波富氏算法:

$$\begin{aligned}
 \text{令 } x_{c,i} &= \frac{2}{T/2} \int_0^{T/2} x(t) \sin \omega_i t dt \\
 x_{s,i} &= \frac{2}{T/2} \int_0^{T/2} x(t) \cos \omega_i t dt
 \end{aligned}$$

在此我们仅讨论基波分量的计算方法即  $i = 1$  的情况: 即

$$\begin{aligned}
 x_{c1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin \omega_1 t dt \\
 x_{s1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos \omega_1 t dt \\
 x_{c1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} [a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\omega_k t + \theta_k)] \sin \omega_1 t dt \\
 &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} a_0 \sin \omega_1 t dt + \frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{T/2} \sin(\omega_k t + \theta_k) \sin \omega_1 t dt \\
 &= \frac{4}{\pi} a_0 + \frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \{ \cos [(\omega_k - \omega_1)t + \theta_k] - \cos [(\omega_k + \omega_1)t + \theta_k] \} dt
 \end{aligned}$$

因为电力系统的电气信号是以基波及奇次谐波为主, 而没有或仅有很小比例的偶次谐波。所以我们暂忽略偶次谐波分量的作用即上式的  $k$  只可能取奇数。这样在  $k \neq 1$  时  $\omega_k + \omega_1$  和  $\omega_k - \omega_1$  一定为  $\omega_1$  的偶数倍即均为偶次谐波, 而偶次谐波在半个基波周期积分的结果一定为零, 所以上式积分号内的结果只剩  $k = 1$  的一项:

$$\text{即 } x_{c1} = \frac{4}{\pi} a_0 + \frac{2}{T} a_1 \int_0^{T/2} [\cos \theta_1 - \cos(2\omega_1 t + \theta_1)] dt$$

$$= \frac{4}{\pi} a_0 + a_1 \cos \theta_1$$

$$\text{同理令 } x_{s1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\omega_k t + \theta_k)] \cos \omega_1 t dt$$

$$\text{可推得 } x_{s1} = a_1 \sin \theta_1$$

由此可知如果对采样数据进行修正消除其中所含的非周期分量,即相当  $a_0 = 0$ ,则有:

$$x_{c1} = a_1 \cos \theta_1$$

$$x_{s1} = a_1 \sin \theta_1$$

$$a_1 = \sqrt{x_{c1}^2 + x_{s1}^2}$$

其结果与全周波富氏变换算法是一致的。如果把全周波和半周波的富氏算法写成离散形式: 设  $N$  为每个周波的采样点数:

$$\begin{aligned} \text{全周波} & \begin{cases} x_{c1} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \sin \frac{2\pi k}{N} \\ x_{s1} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \cos \frac{2\pi k}{N} \end{cases} \\ \text{半周波} & \begin{cases} x_{c1} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{N/2} x(k) \sin \frac{2\pi k}{N} \\ x_{s1} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{N/2} x(k) \cos \frac{2\pi k}{N} \end{cases} \\ & a_1 = \sqrt{x_{c1}^2 + x_{s1}^2} \end{aligned}$$

### 三 修正方法

$$\text{设信号 } x(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{i=1}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin [\omega_{2i+1} t + \theta_{2i+1}]$$

每周波采12个点即  $N = 12$ 。

$$\text{则: } x(0) = I_0 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin [\omega_{2i+1} \cdot 0 \cdot T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$= I_0 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin \theta_{2i+1}$$

$$x(1) = I_0 e^{-\frac{T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin [\omega_{2i+1} T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$x(2) = I_0 e^{-\frac{2T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin [\omega_{2i+1} \cdot 2T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$x(3) = I_0 e^{-\frac{3T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin [\omega_{2i+1} \cdot 3T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$x(4) = I_0 e^{-\frac{4T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin[\omega_{2i+1} \cdot 4T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$x(5) = I_0 e^{-\frac{5T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin[\omega_{2i+1} \cdot 5T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$x(6) = I_0 e^{-\frac{6T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin[\omega_{2i+1} \cdot 6T_s + \theta_{2i+1}]$$

$$x(7) = I_0 e^{-\frac{7T_s}{\tau}} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} I_{2i+1} \sin[\omega_{2i+1} \cdot 7T_s + \theta_{2i+1}]$$

根据奇次谐波相距半个基波周期的两个采样点之和等于零的特点可知:

$$\text{令 } I_{06} = x(0) + x(6) = I_0 + I_0 e^{-\frac{6T_s}{\tau}}$$

$$I_{17} = x(1) + x(7) = I_0 e^{-\frac{T_s}{\tau}} + I_0 e^{-\frac{7T_s}{\tau}}$$

$$\text{令 } E = e^{-\frac{T_s}{\tau}}$$

$$I_{06} = I_0 (1 + E^6)$$

$$I_{17} = I_0 E (1 + E^6)$$

$$\text{由此解出 } E = \frac{I_{17}}{I_{06}}, \quad I_0 = \frac{I_{06}}{1 + E^6}$$

用求得的E和I<sub>0</sub>修正采样数据,即可消除信号中的衰减的非周期分量:

$$x'(0) = x(0) - I_0$$

$$x'(1) = x(1) - I_0 E$$

$$x'(2) = x(2) - I_0 E^2$$

$$x'(3) = x(3) - I_0 E^3$$

$$x'(4) = x(4) - I_0 E^4$$

$$x'(5) = x(5) - I_0 E^5$$

$$x'(6) = x(6) - I_0 E^6$$

于是可用修正后的采样数据用半周波富氏算法求取信号中的基波分量即:

$$x_{c1} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{N/2} x'(k) \sin \frac{2k\pi}{N} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^5 x'(k) \sin \frac{k\pi}{6}$$

$$x_s = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{N/2} x'(k) \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^5 x'(k) \cos \frac{k\pi}{6}$$

$$I_1 = \sqrt{x_{c1}^2 + x_{s1}^2}$$

如果采样一个周波12个点则可以得到12个修正后的采样值x'(0)~x'(11),使得得到修正后的全周波富氏算法。

$$x_{c1} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x'(k) \sin \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{11} x'(k) \sin \frac{k\pi}{6}$$

$$x_{s1} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x'(k) \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{11} x'(k) \cos \frac{k\pi}{6}$$

$$I_1 = \sqrt{x_{c1}^2 + x_{s1}^2}$$

## 四 仿真结果

仿真模型为:

$$x(t) = 10 \sin \theta_1 e^{-\frac{t}{0.05}} + 10 \sin(314t + \theta_1) + I_2 \sin(628t + 0.5) \\ + 1.0 \sin(942t + 0.8) + I_4 \sin(1256t + 1.0) + 0.1 \sin(1570t + 1.57)$$

对全周波的富氏算法在含偶次谐波及不含偶次谐波时分别做了六种不同非周期分量情况仿真实验。结果列于表 1 和表 2。

从表 1 和表 2 可以看出:

1. 全周波富氏算法抑制谐波能力很强,但其精度受衰减的非周期分量的影响较大,随非周期分量幅值的增大,精度明显变化。

2. 修正后的全波富氏算法的精度很高,不受非周期分量的影响。

3. 响应时间为一个周波。

对半周波的富氏算法在含有不同比例偶次谐波时分别做了六种不同非周期分量情况的仿真实验,结果列于表 3~表 5。

从表 3~表 5 可以看出:

1. 半周波富氏算法的精度主要受非周期分量影响,同时也受偶次谐波影响。不经修正的半波富氏算法是不能直接应用的。

2. 修正后的半波富氏算法精度很高。在无偶次谐波的情况下误差小于 0.4%,在偶次谐波含量为 5% 时,误差也小于 3%,这完全可以满足工程的要求。

3. 修正后的半波富氏算法数据窗短,仅需半个周波加一个采样周期,对于  $N=12$  的情况响应时间仅为 11.67 毫秒。

由以上可见,由于修正方法是在线求取非周期分量  $I_0$  及衰减因子  $E$  不必预先知道时间常数,所以其精度不受网络结构的变化以及过渡电阻的影响,因此修正的半波富氏算法是很有实际意义的实用算法。

表1

全周波富氏算法, 信号中含偶次谐波

非周期分量			基波分量					
			未修正结果			修正后结果		
实际值	计算值	相对误差%	实际值	计算值	相对误差%	实际值	计算值	相对误差%
0	0.056		10	9.998	0.02	10	9.991	0.02
2.955	2.88	2.68	10	10.32	3.16	10	9.998	0.02
4.79	4.71	1.73	10	10.50	5.07	10	9.999	0.005
6.44	6.36	1.32	10	10.64	6.48	10	10.001	0.01
8.02	7.93	1.07	10	10.72	7.22	10	10.004	0.04
10	9.93	0.73	10	10.39	3.98	10	10.0106	0.106

$$I_2/I_1 = 20\%, \quad I_3/I_1 = 10\% \quad I_4/I_1 = 5\% \quad I_5/I_1 = 1\%$$

表2

全周波富氏算法, 信号中无偶次谐波

非周期分量			基波分量					
			未修正时结果			修正后结果		
实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%
0	0.055		10	9.99	0.059	10	9.994	0.058
2.95	2.875	2.68	10	10.31	3.11	10	9.994	0.059
4.79	4.71	1.73	10	10.50	5.03	10	9.995	0.045
6.44	6.35	1.32	10	10.64	6.44	10	9.998	0.021
8.02	7.93	1.07	10	10.71	7.19	10	10.001	0.015
10.00	9.92	0.73	10	10.39	3.97	10	10.009	0.097

$$I_2/I_1 = 0, \quad I_3/I_1 = 10\%, \quad I_4/I_1 = 0, \quad I_5/I_1 = 1\%$$

表3

半周波富氏算法, 信号中含偶次谐波

非周期分量			基波分量					
			未修正时结果			修正后结果		
实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%
0	0.055		10	9.885	1.141	10	9.886	1.131
2.955	2.875	2.685	10	13.578	35.387	10	10.038	0.385
4.794	4.710	1.739	10	15.728	57.282	10	10.139	1.395
6.442	6.356	1.328	10	17.482	74.823	10	10.235	2.355
8.016	7.93	1.069	10	18.119	88.119	10	10.334	3.340
10.00	9.93	0.731	10	18.085	80.846	10	10.299	2.99

$$56 \quad I_2/I_1 = 5\%, \quad I_3/I_1 = 10\%, \quad I_4/I_1 = 5\%, \quad I_5/I_1 = 1\%$$

表 4

半周波富氏算法信号中含偶次谐波

非周期分量			基波分量					
			未修正时结果			修正后的结果		
实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%
0	0.055		10	9.942	0.574	10	9.943	0.569
2.955	2.875	2.685	10	13.351	35.175	10	10.015	0.156
4.794	4.710	1.739	10	15.567	56.74	10	10.065	0.653
6.44	6.356	1.32	10	17.403	74.032	10	10.113	1.132
8.016	7.930	1.069	10	18.709	87.09	10	10.162	1.627
10	9.927	0.731	10	17.925	79.25	10	10.244	2.444

$$I_2/I_1 = 2\%, \quad I_3/I_1 = 10\%, \quad I_4/I_1 = 5\%, \quad I_5/I_1 = 1\%$$

表 5

半周波富氏算法信号中无偶次谐波

非周期分量			基波分量					
			未修正时结果			修正后的结果		
实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%	实际值	计算值	误差%
0	0.055		10	9.994	0.058	10	9.994	0.057
2.955	2.875	2.685	10	13.504	35.040	10	10.002	0.022
4.794	4.711	1.739	10	15.633	56.331	10	10.009	0.093
6.442	6.356	1.328	10	17.341	73.411	10	10.016	0.169
8.016	7.930	1.069	10	18.627	86.275	10	10.025	0.251
10	9.927	0.730	10	17.796	77.966	10	10.034	0.348

$$I_2/I_1 = 0 \quad I_3/I_1 = 10\%, \quad I_4/I_1 = 0, \quad I_5/I_1 = 1\%$$

## 参考文献

1. 《关于高性能的计算机式继电保护算法研究》张连斌 吉林电力技术 1987 3
2. 《微机保护原理与技术》陈德树等 湖北电力试验研究所