

相敏电路用作“ $KV\cos\theta$ ”元件的条件分析

山东工学院电力系继电保护教研室 孙茂林

超高压重负荷长线路要求阻抗继电器有很好的躲负荷能力，很好的躲振荡能力，园特性的阻抗继电器不能满足这个要求。实现这个要求的方案之一是采用椭圆形阻抗继电器。构成椭圆形阻抗继电器，可以采用三电量绝对值比较法，可以采用相位比较法。较方便的方法是在阻抗继电器绝对值比较电路的输出端加一反应“ $kV\cos\theta$ ”的偏置电压。

“ $kV\cos\theta$ ”元件可以采用相敏电路，由于相敏电路的低的价格，结构简单及适量的输出，采用它是合理的。在英国的“保护继电器”及印度的“静态继电器”两本著作中都介绍了采用相敏电路作为“ $kV\cos\theta$ ”元件，但条件提的不明确，推证不严格，没有指明公式的近似性，更没有给出相敏电路不能用作“ $kV\cos\theta$ ”元件的条件及对应的输出表达式。本文从输出电压平均值的精确表达式出发，推证了相敏电路用作“ $kV\cos\theta$ ”元件的条件，指明了精确“ $kV\cos\theta$ ”元件的条件，推出了在近似条件下准确系数 k_2 及最大相对误差表达式，在较大误差的条件下，作了误差曲线，并推出了在不能用作“ $kV\cos\theta$ ”元件时，它的输出电压平均值的正确表达式。从而澄清了上述著作的含混提法，以便在设计和应用“ $kV\cos\theta$ ”元件时，注意条件，达到预期的目的。

一、相敏电路输出电压的特点

相敏电路即环流比相回路，它的原理图如图1所示。它的动作情况在继电保护教材上都有说明，这里只把它的特点作如下概括，作为推证输出电压平均值准确表达式的依据：

- 1.同正异负：输出电压的极性取决于两被比电量二次电流瞬时值极性的异同，两电流瞬时值同极性时 u_{m2} 为正，异极性时 u_{m2} 为负
- 2.倍频输出：当两被比电量频率相同时，输出为二倍频的周期波。
- 3.大值开路，小值输出：瞬时值较大的电流决定电流流通的路径，起着开路作用；输出电压的瞬时值只取决于瞬时值较小的电流，小值电流为与输出有关的工作电流。
- 4.两输入电气量的二次电流为小幅值同频率的正弦波时，由于交替工作输出电压波形为分段正弦波的组合；二次电流为大幅值同频率正弦波时，输出为周期方波，如图2所示。

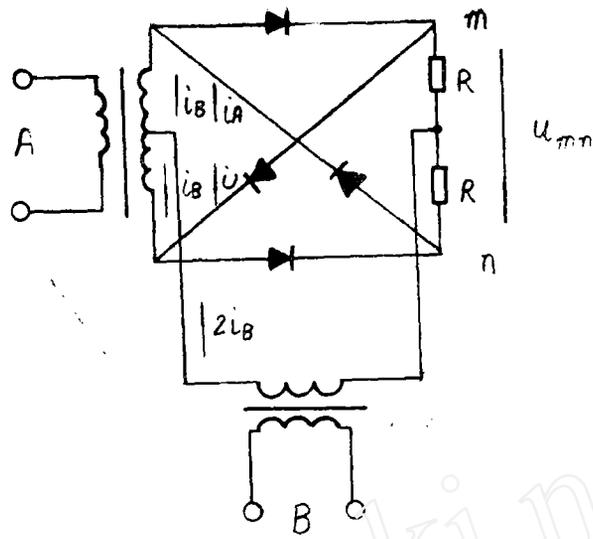


图 1 相敏电路原理图

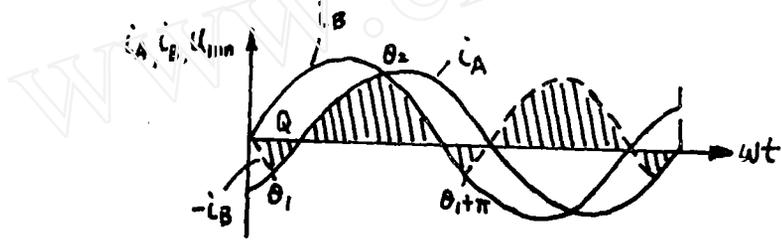


图 2 a 输入为小幅值同频率正弦波时输出电压波形为分段正弦波组合 (阴影包线)

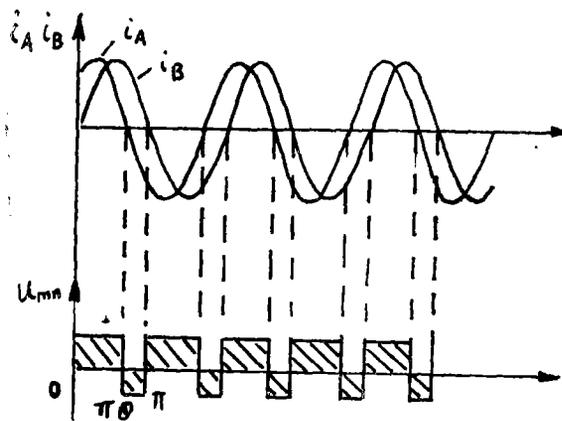


图 2 b 输入为大幅值同频率正弦波时输出电压为周期方波

二、“小信号”时输出电压平均值的表达式

“小信号”是指两输入电量的二次电流为同频率小幅值的正弦波，它产生的输出电压的幅值可靠小于二个二极管正向管压降，这时输出电压的波形为分段正弦波的组合，如图 2 a 所示，因而其平均值为

$$\begin{aligned}
 U_{\text{av}} &= \frac{R}{\pi} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} i_A d\omega t + \int_{\theta_2}^{\theta_1+\theta} i_B d\omega t \right] \\
 &= \frac{R}{\pi} \left[\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta} - \sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 - 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta} \right] \\
 &\dots\dots\textcircled{1} \quad [\textcircled{1}\text{式的推证见附录}]
 \end{aligned}$$

这告诉我们相敏电路在“小信号”输入时，它的输出电压的平均值等于 $\frac{R}{\pi}$ 倍的 \dot{I}_{mA} 与 \dot{I}_{mB} 相量和的绝对值减去它们相量差的绝对值。这是它的精确表达式。

由①式可知，在“小信号”输入时，相敏电路的输出电压的平均值并不等于“ $k\nu\cos\theta$ ”，那么在什么条件下，相敏电路可以用作“ $k\nu\cos\theta$ ”元件呢？怎样从①式出发推出“ $k\nu\cos\theta$ ”呢？现假设 $I_{mA} < I_{mB}$ 并令 $I_{mA}/I_{mB} = m$ ，则①式可以写成：

$$\begin{aligned}
 U_{\text{av}} &= \frac{R}{\pi} \left[(I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta)^{\frac{1}{2}} - (I_{mA}^2 + I_{mB}^2 - 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{R}{\pi} I_{mB} \left[(1 + m^2 + 2m\cos\theta)^{\frac{1}{2}} - (1 + m^2 - 2m\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{R}{\pi} I_{mB} (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[(1 + M)^{\frac{1}{2}} - (1 - M)^{\frac{1}{2}} \right] \dots\dots\textcircled{2}
 \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{2m\cos\theta}{1+m^2}$ ，在 $m < 1$ 时 $M < 1$

因而②式可用牛顿二项式展开：

$$\begin{aligned}
 U_{\text{av}} &= \frac{R}{\pi} I_{mB} (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2 \cdot 4}M^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}M^3 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}M^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}M^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}M^6 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}M^7 \dots\dots \right) - \left(1 - \frac{1}{2}M - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2 \cdot 4}M^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}M^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}M^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}M^5 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}M^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}M^7 \dots\dots \right) \right] \\
 &= \frac{R}{\pi} I_{mB} (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} \left[M + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6}M^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}M^5 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}M^7 + \dots\dots \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{R}{\pi} I_{mB} (1+m^2)^{\frac{1}{2}} M [1+0.125M^2+0.055M^4+0.032M^6+\dots] \dots\dots(3)$$

$$\because M = \frac{2m\cos\theta}{1+m^2} \quad mI_{mB} = I_{mA} \quad I_{mA} \cdot R = V_{Am} = \sqrt{2}V_A$$

V_A 为A变流器二次电压的有效值以下用V表示

$$\therefore U_{m\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V \cos\theta \frac{[1+0.125M^2+0.055M^4+0.032M^6+\dots]}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$= KV \cos\theta \cdot K_e$$

其中 $K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 为常数

K_e 定义为准确系数

$$K_e = [1+0.125M^2+0.055M^4+0.032M^6+\dots] / \sqrt{1+m^2}$$

显然 K_e 是 m 、 θ 的函数,它有着以下特点:

1.在 $\theta = 0^\circ$, 180° 时 $K_e = 1$ 这时 $U_{m\alpha} = KV \cos\theta$.

用作“ $KV \cos\theta$ ”元件是无误差的,是准确的。

2.在 $\theta = \pm 90^\circ$ 时, $U_{m\alpha} = 0$ $KV \cos\theta = 0$ 但 $K_e \neq 1$

这说明相敏电路在 $|\theta| \rightarrow 90^\circ$ 但 $|\theta| \neq 90^\circ$ 时, $U_{m\alpha} \neq KV \cos\theta$, 此时 K_e 有着最小值 $K_{e_{min}} = 1 / \sqrt{1+m^2}$, 这说明在 $|\theta| \rightarrow 90^\circ$ 但 $|\theta| \neq 90^\circ$ 时,用 $KV \cos\theta$ 代表 $U_{m\alpha}$ 将有着最大的相对误差,是不准确的。这正如 $(N \cos x) \cdot x$ 与 x 两个表达式,虽然在 $x = 0$ 时都等于零,但当 $x \rightarrow 0$ 且 $x \neq 0$ 时,用 $(N \cos x) \cdot x$ 代表 x 相对误差将是 $\frac{(N \cos x) \cdot x - x}{x} = N \cos x - 1 = N - 1$.

3.当 $|\theta|$ 由 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$, K_e 由 $1 \rightarrow 1 / \sqrt{1+m^2}$

$|\theta|$ 由 $90^\circ \rightarrow 180^\circ$, K_e 由 $1 / \sqrt{1+m^2} \rightarrow 1$.

4.相对误差随着 $|\theta|$ 接近 90° 而增大,最大的相对误差为:

$$E_{m\alpha} = \lim_{|\theta| \rightarrow 90^\circ} \frac{KV \cos\theta - KV \cos\theta \cdot K_e}{KV \cos\theta \cdot K_e}$$

$$= \frac{1 - K_{e_{min}}}{K_{e_{min}}} = \sqrt{1+m^2} - 1 \dots\dots(4)$$

为了得到相对误差随着 θ 及 m 而变的直观印象作了 $m = 0.9$ 及 $m = 0.8$ 时 $E\% \sim \theta$ 曲线。

$$E\% = \frac{1 - K_e}{K_e} \cdot 100\%$$

$m = 0.9$

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	$\rightarrow 90^\circ$
M	0.994	0.960	0.861	0.703	0.497	0.257	$\rightarrow 0$
k_c^*	1	0.882	0.844	0.804	0.768	0.749	$\rightarrow 0.743$
$E\%$	0	13.4	18.5	24.2	30.2	33.5	$\leftarrow 34.6$

$m = 0.8$

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	$\rightarrow 90^\circ$
M	0.975	0.942	0.884	0.689	0.488	0.252	$\rightarrow 0$
k_c^*	1	0.918	0.894	0.839	0.807	0.787	$\rightarrow 0.781$
$E\%$	0	8.9	11.8	19.1	23.9	27.0	$\rightarrow 28.0$

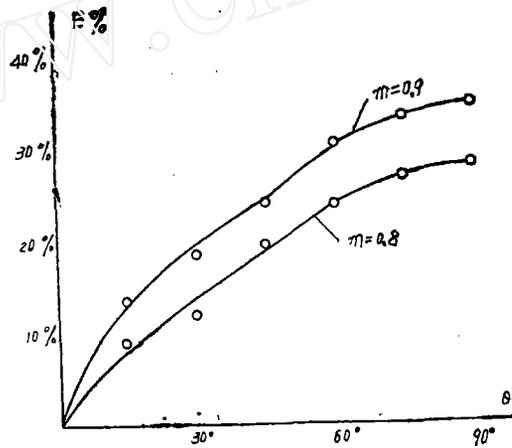


图3 $E\% \sim \theta$ 曲线

分析图3可得以下结论:

1. 当 $|\theta|$ 由 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ 变化时, $E\%$ 逐渐增大。

2. 当 $|\theta| \geq 15^\circ$ 时, $E\%$ 接近或大于 $\frac{1}{3} E_{max}\%$, 因而在 $E_{max}\%$ 较大时, 在 θ 的相当大的范围内有着不可忽略的误差。

3. 因为 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, 而 $K_c |_\theta = f(m, \cos^2 \theta)$

所以 $K_c |_{180-\theta} = f[m, \cos^2(180^\circ - \theta)] = f(m, \cos^2 \theta) = K_c |_\theta$,

因而当 $|\theta|$ 由 $180^\circ \rightarrow 90^\circ$ 变化时, $E\%$ 的变化规律与 $|\theta|$ 由 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$ 变化规律相同。

4. 误差的最大值在 $|\theta| \rightarrow 90^\circ$ 时, 只要 $E_{m.a.x}\%$ 小于要求值, 在一切 θ 下误差必小于这个值。

根据上述分析, 在给定误差要求后, 可以使 $E_{m.a.x}\%$ 满足要求, 从而确定 m 值, 再由 m 值确定电路参数, 就可保证在一切 θ 值, 相敏电路用作 “ $KV\cos\theta$ ” 元件, 满足要求的准确度。

设要求的精度为误差 $E\% \leq e \times 100\%$, 则由④式可得:

$$\sqrt{1+m^2} - 1 = e$$

$$\therefore m = \sqrt{2e + e^2} \dots\dots④'$$

如要求误差小于10%, 由④'式可求得

$$m = \sqrt{0.2 + 0.01} = 0.458,$$

这就要求 $I_{m.A} \leq 0.458 I_{m.B}$

一般称 A 侧电流为工作电流, B 侧电流为极化电流, $I_{m.A}$ 为工作电流的幅值, $I_{m.B}$ 为极化电流的半幅值(注意)。若以 h 表示极化电流的幅值与工作电流的幅值比, 则 $h = 2/m$, 在以上的例子中若要求 $E\% \leq 10\%$, 需 $h \geq 4.37 = 4.4$, 就要求极化电流的幅值与工作电流的幅值比大于或等于4.4

还要注意, 在设计时只要求在继电器动作边界附近短路时 h 能满足要求。因为只要这样, 就能确保规定的准确度, 确保要求的动作曲线, 确保选择性。至于在外部短路时, 由于 I 、 V 的变化不能满足上述要求误差增大, 是无关重要的, 因为已处在不动作区。

三、精确 “ $KV\cos\theta$ ” 元件的条件

在“小信号”正弦输入的条件下, 若要求 $E_{m.a.x}\% \rightarrow 0$, 就必须 $m \rightarrow 0$, 这就要求极化电流的幅值大于工作电流的幅值, 这必然增大相敏电路的功率损耗, 导致增大元件的容量及尺寸, 这是不希望的。为了既有高的精度, 又有低的功率损耗和小的体积, 可用方波信号代替大幅值的正弦波作为极化电流, 方波要和原极化电流同频率, 同时过零, 且方波幅值要可靠地大于工作电流的幅值, 如图4所示。在这种情况下, 垂直线代替了原极化电流的正弦波线, 正弦波与直线的组合代替了分段正弦波的组合。因而 $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = \theta + \pi$,

$$U_{m.a} = \frac{R}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+\pi} I_{m.A} \sin \omega t d\omega t = \frac{R}{\pi} I_{m.A} \cos \omega t \int_{\theta+\pi}^{\theta}$$

$$= \frac{2R}{\pi} I_{m.A} \cos\theta = KV \cos\theta \dots\dots⑤$$

其中 $K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ $V = I_{m.A} R / \sqrt{2}$ 与前同

因而相敏电路用作精确的“ $KV\cos\theta$ ”元件的条件是工作电流是小幅值正弦波，极化电流为同频率幅值大于工作电流幅值的方波。实现方法是先把正弦信号变为适当幅值的方波信号，再作为极化电流送到相敏电路。

作为方波的近似是加大极化电流的幅值，使它大于工作电流的幅值，为了减小相敏电路的功率损耗加双向限幅二极管，分流多余的电流如图 5 所示。在这种条件下可以得到近似精确的“ $KV\cos\theta$ ”元件

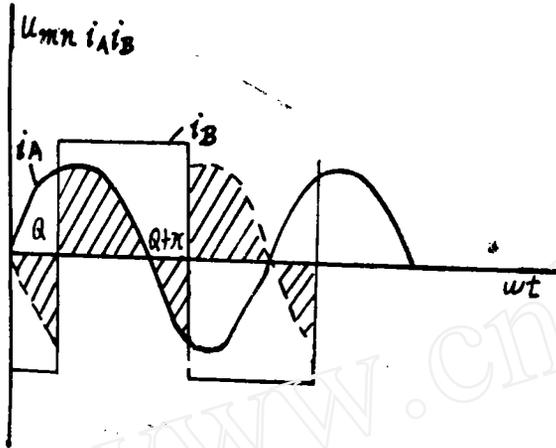


图 4 方波作极化电流时输出电压波形

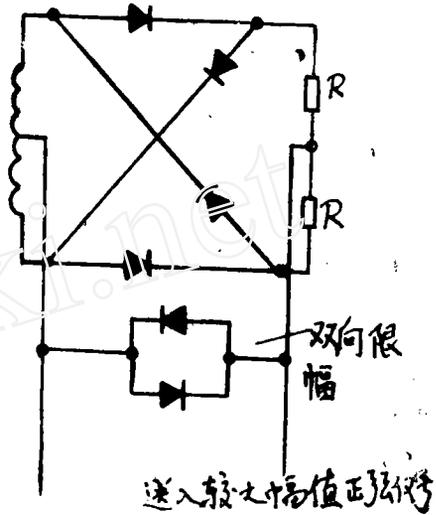


图 5 近似方波作极化电流方案

四、不能用作“ $KV\cos\theta$ ”元件的三种情况

1. A, B 虽为小幅值同频率正弦波，但 $I_{mA} = I_{mB} = I_m$ ，由①式可得：

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{R}{\pi} \left[\sqrt{2I_m^2 + 2I_m^2 \cos\theta} - \sqrt{2I_m^2 - 2I_m^2 \cos\theta} \right] \\ &= \frac{R}{\pi} I_m \left[\sqrt{2(1 + \cos\theta)} - \sqrt{2(1 - \cos\theta)} \right] \\ &= \frac{2R}{\pi} I_m \left[\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| - \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right] \\ &= \sqrt{2} KV \cos \left(\frac{|\theta|}{2} + 45^\circ \right) \dots\dots \textcircled{6} \quad (\text{推证见附录 2}) \end{aligned}$$

其中 $K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ $V = \frac{I_m R}{\sqrt{2}}$

由⑥式可知，在小幅值等幅同频率正弦波作为工作电流及极化电流的条件下，相敏电路输出电压的平均值不反映“ $KV\cos\theta$ ”而反映“ $\sqrt{2}KV\cos\left(\frac{|\theta|}{2} + 45^\circ\right)$ ”也就是

说它反映 $\sqrt{2}K$ 倍的工作电压二次有效值与移相 45° 的半角(取正)余弦的乘积。

2. A, B 虽为小幅值同频率正弦波,但 $I_{mA} > I_{mB}$ 。很显然在这种条件下,输出电压的平均值较多地取决于极化电流,当然不能看成 K 倍的工作电压的二次有效值与 $\cos\theta$ 的乘积。

3. A, B 为大幅值的同频率的正弦波,相敏电路的输出电压被二对串联二极管双向限幅,输出电压近似二倍频周期方波,方波的幅值为二倍二极管导通管压降,如图2b所示。在这种条件下,相敏电路的输出电压的平均值可以写成:

$$\begin{aligned} U_{m\pi} &= \int_{\theta}^{\pi-\theta} 2\Delta U d\omega t - \int_{\pi-\theta}^{\pi} 2\Delta U d\omega t \\ &= 2\Delta U [\pi - \theta] - 2\Delta U [\pi - (\pi - \theta)] \\ &= 2\Delta U \pi - 4\Delta U \theta \\ &= M - N\theta \quad \dots\dots\textcircled{7} \quad [0 \leq \theta \leq \pi] \end{aligned}$$

其中 $M = 2\pi\Delta U$ 为纵轴截距,(一) N 为直线斜率,由⑦式可知 $U_{m\pi}$ 与 θ 的关系为直线关系,在 $\theta = 0$ 时输出最大,为二倍管压降的 π 倍,在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $U_{m\pi} = 0$,在 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时 $U_{m\pi}$ 为负,在 $\theta = \pi$ 时 $U_{m\pi}$ 为负的最大值。

同样方法可以推出 θ 在 $[-\pi, 0]$ 范围内, $U_{m\pi} = M + N\theta$ 。图6作出了 θ 在 $[-\pi, \pi]$ $U_{m\pi} \sim \theta$ 的关系曲线。

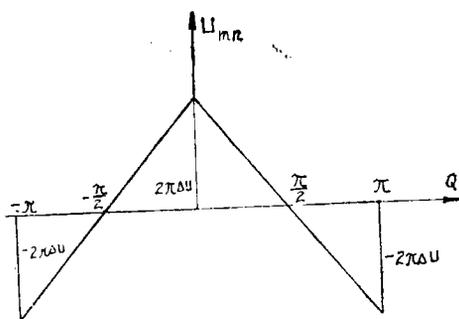


图6 A、B为大幅值同频率正弦波时 $U_{m\pi} \sim \theta$ 曲线

由⑦式及图6可以看到,在工作电流及极化电流都为大幅值同频率正弦波时,输出电压 $U_{m\pi}$ 既与工作电压的二次有效值“ V ”无关,又与“ $\cos\theta$ ”无关,它绝不反应“ $KV\cos\theta$ ”,在这种情况下 $U_{m\pi}$ 与 θ 可以看成直线关系,利用这种可贵的直线关系可以制作简单,价廉,均匀刻度的相位表。

实验指出在方波前沿及后沿不太陡的情况下,在 0 及 π 附近直线有些弯曲,但在相当范围内具有良好的直线特性。

结 论

相敏电路用作“ $KV\cos\theta$ ”元件是有条件的,在工作电流及极化电流为小幅值同频率正弦波,且工作电流幅值比极化电流幅值小时是近似的,它的近似程度随着 m 的减小而提高。应用时可以根据精确度的要求确定相应的 m 值,正确选择电流变换器参数。在工作电流为小幅值正弦波,极化电流为同频率方波,且方波的幅值大于工作电流幅值

时, 用作“ $KV\cos\theta$ ”元件是精确的无误差的。在工作电流为小幅值正弦波, 极化电流为同频率近似方波, 方波幅值大于工作电流幅值时, 是近似精确的, 误差极小的。在工作电流及极化电流虽为小幅值同频率正弦波, 但工作电流幅值大于或等于极化电流幅值时, 用作“ $KV\cos\theta$ ”元件是错误的。(注意 V 为工作电压二次有效值)在工作电流与极化电流为大幅值同频率正弦波时, 用作“ $KV\cos\theta$ ”元件更是错误的, 的这时 U_{mn} 与 θ 近似成直线关系, 利用这种直线特性, 可以制作均匀刻度的相位表。

附录 1: 公式①之推证

在图2a中

$$i_A = I_{mA} \sin(\omega t - \theta) \quad i_B = I_{mB} \sin \omega t$$

因而输出电压的平均值为:

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \frac{I}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \pi} u_{mn} d\omega t = \frac{R}{\pi} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} i_A d\omega t + \int_{\theta_2}^{\theta_1 + \pi} i_B d\omega t \right] \\ &= \frac{R}{\pi} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_1} I_{mA} \sin(\omega t - \theta) d\omega t + \int_{\theta_2}^{\theta_1 + \pi} I_{mB} \sin \omega t d\omega t \right] \\ &= \frac{R}{\pi} \left[I_{mA} \cos(\theta - \theta_1) - I_{mA} \cos(\theta_2 - \theta) + I_{mB} \cos \theta_2 + I_{mB} \cos \theta_1 \right] \\ &= \frac{R}{\pi} \left[(I_{mA} \cos \theta + I_{mB}) \cos \theta_1 + I_{mA} \sin \theta \cdot \sin \theta_1 - I_{mA} \sin \theta \cdot \sin \theta_2 - \right. \\ &\quad \left. - (I_{mA} \cos \theta - I_{mB}) \cos \theta_2 \right] \dots\dots x \end{aligned}$$

在 x 式中消去 $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\sin \theta_1$ 及 $\sin \theta_2$ 就可得到只包括 θ 的关系式, 为此补充以下方程:

θ_1 , θ_2 为交点横坐标因而

$$i_A |_{\theta_1} = -i_B |_{\theta_1}$$

$$i_A |_{\theta_2} = i_B |_{\theta_2}$$

$$\text{即 } I_{mA} \sin(\theta_1 - \theta) = -I_{mB} \sin \theta_1 \quad x_A$$

$$I_{mA} \sin(\theta_2 - \theta) = I_{mB} \sin \theta_2 \quad x_B$$

$$\text{展开 } x_A \text{ 得 } I_{mA} \sin \theta_1 \cos \theta - I_{mA} \cos \theta_1 \sin \theta = -I_{mB} \sin \theta_1$$

$$\therefore \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{I_{mA} \sin \theta}{I_{mA} \cos \theta + I_{mB}}$$

$$\begin{aligned} \text{因而 } \sin \theta_1 &= \frac{I_{mA} \sin \theta}{\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA} I_{mB} \cos \theta}} \\ \cos \theta_1 &= \frac{I_{mA} \cos \theta + I_{mB}}{\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA} I_{mB} \cos \theta}} \end{aligned} \quad x_C$$

展 x_B 同理可得:

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta_2 &= \frac{I_{mA}\sin\theta}{\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 - 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta}} \\ \cos\theta_2 &= \frac{I_{mA}\cos\theta - I_{mB}}{\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta}} \end{aligned} \right\} x_D$$

将 x_C, x_D 代入 x 式, 可得:

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \frac{R}{\pi} \left[\frac{(I_{mA}\cos\theta + I_{mB})^2 + (I_{mA}\sin\theta)^2}{\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(I_{mA}\cos\theta - I_{mB})^2 + (I_{mA}\sin\theta)^2}{\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 - 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta}} \right] \\ &= \frac{R}{\pi} \left[\sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 + 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta} - \sqrt{I_{mA}^2 + I_{mB}^2 - 2I_{mA}I_{mB}\cos\theta} \right] \end{aligned}$$

……证完

附录 2: 公式⑥之推证

$$\begin{aligned} \sqrt{2(1+\cos\theta)} - \sqrt{2(1-\cos\theta)} &= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} - \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2 \left(\left| \cos\frac{\theta}{2} \right| - \left| \sin\frac{\theta}{2} \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ 时 } \quad \left| \cos\frac{\theta}{2} \right| - \left| \sin\frac{\theta}{2} \right| &= \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + 45^\circ\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + 45^\circ\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } -\pi \leq \theta < 0 \text{ 时 } \quad \left| \cos\frac{\theta}{2} \right| - \left| \sin\frac{\theta}{2} \right| &= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} - 45^\circ\right) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{\theta}{2} + 45^\circ\right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + 45^\circ\right) \end{aligned}$$

证完

参考文献:

1. A, R, Van C, WARRINGTON *Protective Relays*.
2. T, S, MADHAVA RAO *Power system Protection Static Relays*.