

谐波分析和差动保护动态分析

清 华 大 学 王 维 俭
许 昌 继 电 器 研 究 所 钟 锡 龄

内 容 提 要

1. 本文作者认为付氏级数的谐波分析法（离散频谱）不能用来分析差动保护的内部短路电流，正确的方法是付氏积分的连续频谱分析。
2. 苏联А·С·Эасыпкин等人在1977年提出的差动保护内部短路电流谐波分析资料是不成立的，否定二次谐波是判别激磁涌流和内部短路的特征量是错误的。
3. 分析差动保护的動作特性必须考虑装置本身的动态特性。
4. 美国西屋公司二次谐波制动的差动保护在空载合闸时的误动作，原因不一定是涌流二次谐波成分太小，该装置的明显问题是谐波滤波电路的动态特性配合不当，因此将二次谐波制动比由15%减为7.5%是不必要和不应该的。
5. 利用谐波成分来区分正常状态和故障状态的保护，在本质上就不可能是极快速的。动作参数取自定子回路或高压系统者，其保护动作时间不能小于工频一周期（由转子回路取动作参数者除外）。

（一）问题的提出

最近若干年来，利用谐波分量构成某种保护方案的做法，有显著的进展，例如发电机内部故障以转子回路的二次谐波电流为判据，转子二点接地故障以定子回路的二次谐波电压为判据，定子单相接地故障以定子回路的基波与三次谐波电压为判据，变压器的差动保护采用二次谐波电流制动，基波电流动作等。因此电量的谐波分析是一项基础工作。本文目的是针对谐波制动的变压器差动保护讨论几个问题。

通常国内外发表的有关保护方面的谐波分析资料，总是把一个暂态电量在时间上分成第一周期（由 $t=0$ 到 $20ms$ 止），第二周期（第二个 $20ms$ 阶段）等间隔，对每个周期的暂态波形用傅里哀级数进行谐波分析，指出这一周期内包含各次谐波的大小，我们从一些现场试验资料中，摘录部分数据：

1. 变压器差动保护区的两相短路，最大短路电流为电流互感器一次额定电流的10倍左右，试验电源电压 $V_{CA} = V_m \sin(\omega t + \varphi)$

当短路初相角 φ 为 0° 时

周 期	相 别 谐 波	C					A				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1		100	10.7	31.1	4.25	2.05	100	2.24	63.6	5.17	40
2		100	2.64	24.4	2.72	2.04	100	10.1	64.2	9.7	37.1
3		100	6.95	31.7	4.28	4.75	100	7.8	61	5.65	38.1
4		100	10.3	25.2	4.63	8.8	100	11.7	57.7	16.8	29.9
5		100	10.6	15.9	1.9	0.44	100	11.3	58.7	20.4	38

短路初相角 φ 为 90° 时有

周 期	相 别 谐 波	A					B				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1		100	83.2	47.8	47.1	39.2	100	86	54.8	26.9	21.4
2		100	33.4	44.4	14.4	18.5	100	72	25.2	35.8	13.5
3		100	12.2	51.3	8.37	26	100	73.5	29.4	4.6	7.2
4		100	17.7	50.3	11.4	30.4	100	21.5	39	18.7	2.47
5		100	14.8	54	13.3	39.4	100	6.25	28.2	15.6	7.35

特别注意到，内部短路时差动回路电流中也具有相当大的各次谐波（直流分量未列出），尤其使人感到意外的是内部短路时差电流中有很大的二次谐波成分（有时竟达70~80%），但差动保护（二次谐波整定在20%制动）在现场试验中是正确动作的。

2. 变压器差动保护区外三相短路，各次谐波成分为（B相未列出，直流分量也未列出）。

周 期	相 别 谐 波	C					A				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1		100	33	9	5	2.7	100	56.8	16.6	27.9	32.6
2		100	33.6	10.8	8.17	3.6	100	13.9	6.46	1.42	1.4
3		100	64	30.2	16.1	3.62	100	19.3	4.13	15.6	3.03

差动保护正确不误动。

3. 变压器两次空载合闸，B相涌流第一周期的各次谐波成分为（直流分量未列

出)。

次谐波	I					II				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	100	44.3	8.5	6.55	3.9	100	33.7	8.44	12.1	3.15

差动保护正确不误动。

4. 苏联“电站”1977年第1期发表用计算机分析变压器在内部短路, 外部短路、空载合闸时, 差动回路电流中二次谐波对基波的百分比 $I_{2\omega}/I_{\omega}\%$ 见图1。

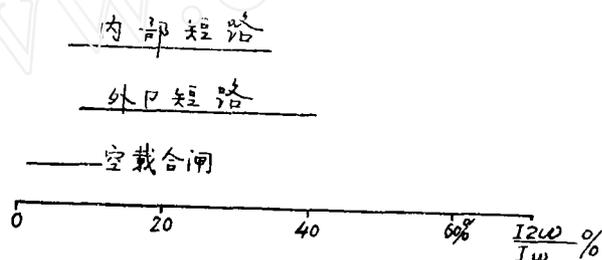


图 1

根据这些数据, 该文作者认为: 二次谐波电流对基波电流的百分比不能作为判别合闸涌流和短路电流的依据。

但是二次谐波或高次谐波制动的变压器差动保护在国际上已应用数十年, 效果是肯定的, 虽然近年来由于系统的不断扩大, 内部短路电流倍数过大, 引起电流互感器极度饱和。可能使谐波制动的差动保护拒动, 为此而加用了差动速断, 但并未否定二次谐波或高次谐波作为防止涌流误动的特征量。

然则如何看待上述分析资料(特别是内部短路的谐波分析)的可靠性呢? 为了解释清楚这个问题, 我们将对一个短暂脉冲波形的谐波(或频谱)分析问题作细致的讨论, 然后将在这个基础上对保护装置的动态特性进行分析。

(二) 输入讯号为 $\text{Sin } \omega_0 t$ 的谐波(频谱)分析。

输入讯号为纯正弦波 $\text{Sin } \omega_0 t$, 用付氏级数的谐波分析法, 结果当然是只有基波而没有其它各次谐波。但是注意到我们所要讨论的是快速保护输入讯号的谐波分析, 因此要分析的仅仅是正弦波 $\text{Sin } \omega_0 t$ 的一段, 也就是输入讯号是一个脉冲波, 对此, 我们用付里哀积分的连续频谱分析方法, 令输入讯号为

$$f(t) = \text{Sin } \omega_0 t \quad 0 < t < \tau$$

则其频谱(密度)为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} \sin \omega_0 t dt$$

$$= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [1 - e^{-j\omega \tau} \cos \omega_0 \tau] - \frac{j\omega e^{-j\omega \tau} \sin \omega_0 \tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1)$$

现在我们求脉冲波宽 $\tau = n \frac{T}{2} = n \cdot \frac{\pi}{\omega_0}$ ($n = 1, 2, \dots$) 时相应的频谱, 由上式可寻出

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} [1 - (-1)^n e^{-jn\pi \frac{\omega}{\omega_0}}] \quad (2)$$

通常我们所关心的只是 $F(\omega)$ 的幅值大小 $|F(\omega)|$,

$$|F(\omega)| = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \cdot \frac{\sin}{\cos} (n \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}) \quad (3)$$

式中

$n =$ 偶数时用 \sin , $n =$ 奇数时用 \cos

我们列举 $\tau = \frac{T}{2}$ ($n = 1$, 半个正弦波), $\tau = T$ ($n = 2$, 一个正弦波), $\tau = 6 \frac{T}{2}$ ($n = 6$, 三个正弦波), $\tau = 10 T$ ($n = 20$, 10个正弦波) 的频谱。(图 2 ~ 6)。

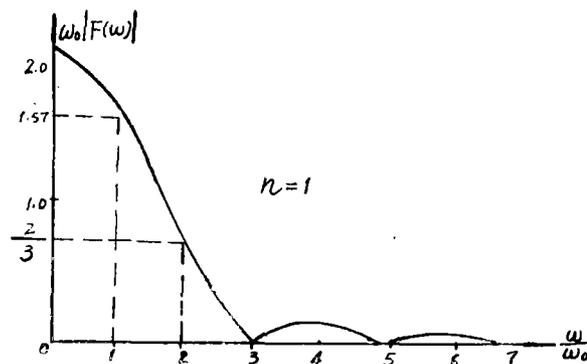


图 2

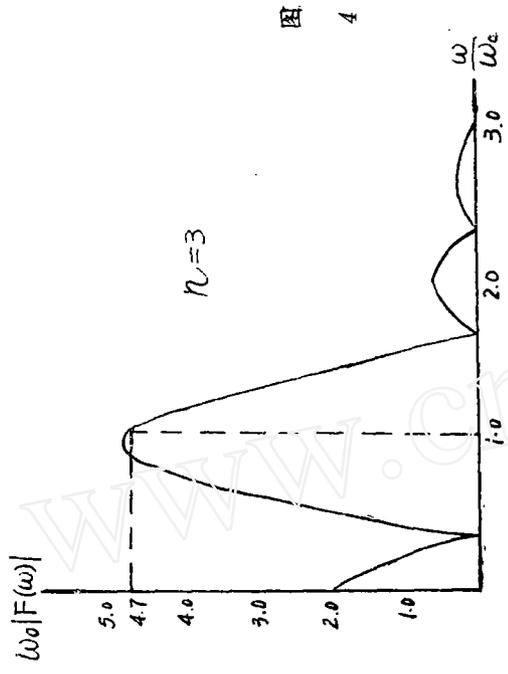


图 4

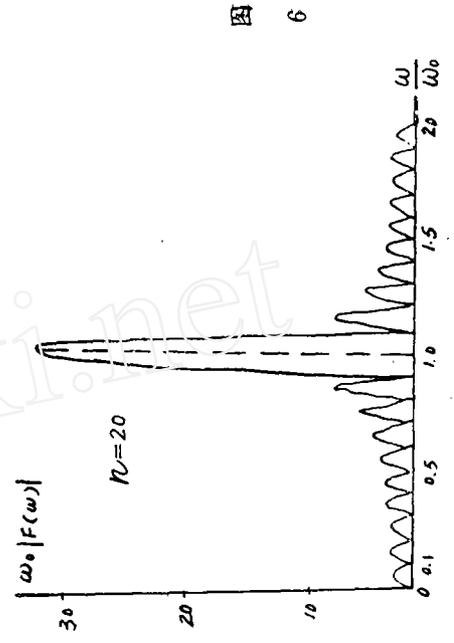


图 6

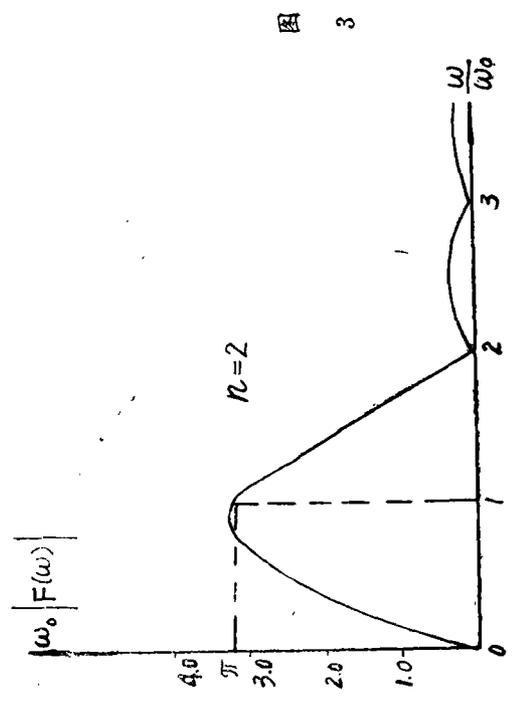


图 3

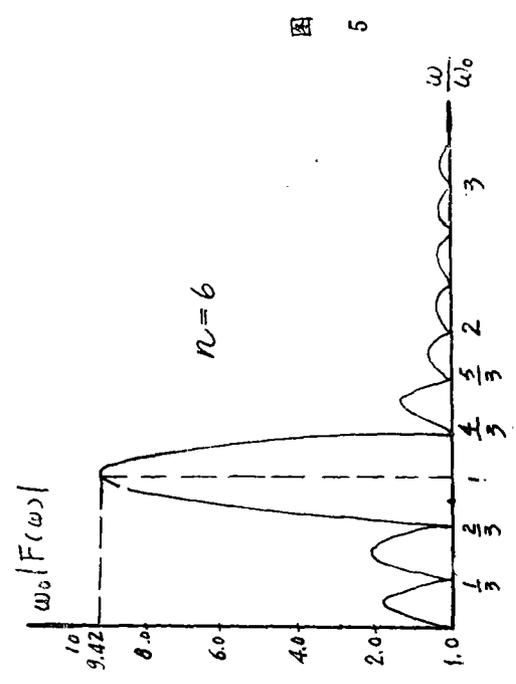


图 5

由这些频谱图形, 十分清楚地看到: 随着输入讯号持续时间 τ 的增长(n 增大), 频谱在基波频率 ω_0 处愈集中, 其它频率的频谱, 相对地减小。很容易理解, 如果 $\tau \rightarrow 0$, 则频谱将趋向完全均匀, 即分不出那个谐波大那个谐波小; 如果 $\tau \rightarrow \infty$, 则频谱将在 $\omega = \omega_0$ 处无限地增长, 而在其它频率处则相对减小, 这从数学上也是很清楚的, 因为在 $\omega = \omega_0$ 时, 公式(3)为 $|F(\omega)| = \frac{0}{0}$ 呈不定式, 为此用罗彼塔法则, 式(3)的分子分母均对 ω 取导数, 再以 $\omega = \omega_0$ 代入, 得

$$|F(\omega)|_{\omega=\omega_0} = n \frac{T}{4} \quad (4)$$

可见, 在 $\omega = \omega_0$ 处的频谱密度随 τ 的增大(即 n 增加)而增大; $n \rightarrow \infty$, $|F(\omega)| \rightarrow \infty$ (频谱密度趋于无穷大, 但 $\omega = \omega_0$ 的基波幅值是有限值, 因为 $F(\omega_0) d\omega$ 中 $d\omega \rightarrow 0$)。

图2告诉我们, 如果输入讯号仅有半个正弦波, 那么频谱密度的最大值并不在基本波 ω_0 处。只有当输入讯号超过一个正弦波, 频谱密度的最大值才位于 ω_0 附近, 而且 τ 愈长(n 愈大)频谱在 ω_0 附近越密集, 以 $n =$ 偶数为例, 由(3)知

$$|F(\omega)| = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \text{Sin}(N\pi \frac{\omega}{\omega_0}) \quad N = \frac{n}{2} \quad 1, 2, 3 \dots$$

相应波宽 $\tau = NT = T, 2T, 3T \dots$, 即现在讨论输入讯号为一个、二个、三个……正弦波, 观察由 $\frac{\omega}{\omega_0} = 0$ 开始到 $|F(\omega)|$ 第一次为0的频率区间 $\Delta\omega$, 则

$$\text{Sin}(N\pi \frac{\omega}{\omega_0}) = 0$$

即 $N\pi \frac{\omega}{\omega_0} = \pi$

或 $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{N} = \frac{2}{n} \quad (5)$

($\because \Delta\omega = \omega - 0 = \omega$)

所以 $n = 6$ 时 $|F(\omega)|$ 第一次为0的频率区间 $\Delta\omega$ 为 $\frac{2\omega_0}{6} = \frac{1}{3}\omega_0$ (图5),

$n = 20$ 时 $\Delta\omega$ 为 $\frac{2\omega_0}{20} = \frac{2\omega_0}{20} = 0.1\omega_0$ (图6)。因此在 $n = 6$ 时在 $\omega = \omega_0$ 处频谱

密集于 $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2}{3} \sim \frac{4}{3}$, 即频带为 $\frac{2}{3}\omega_0$, $n = 20$ 时在 $\omega = \omega_0$ 处频谱密集的频带为 $0.2\omega_0$,

而在 $n = 2$ 时, 频谱由(5)式可推得

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{N} \quad \text{即} \quad \Delta f \cdot T = \frac{1}{N}$$

即 $\Delta f \cdot NT = \Delta f \cdot \tau = 1 \quad (6)$

(6)式告诉我们: 输入讯号持续时间 τ 越长, $|F(\omega)|$ 两次为0的频带 Δf 越窄, 也就是频谱越密集。

以上是用付氏积分的连续频谱方法分析一段 $\sin \omega_0 t$ 波形的结果,为了进行对比,我们将付氏级数的离散频谱(线状频谱)方法的分析结果列出来:

对于半个正弦波的付氏级数谐波分析有

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\pi(k+1)(k-1)} \cos k \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin \omega_0 t, \quad (k \text{ 为偶数})$$

这是将正弦半波无限重复(相当于单相半波整流)时所得的谐波成分(图7),它和付氏积分分析结果(图2)相同之处

为:两者均有直流分量($\omega = 0$),基波,2、4、6等偶次谐波,而且这些谐波的相对大小也相同,例如图7中二次

谐波与直流分量之比为 $\frac{2}{3\pi} / \frac{2}{\pi} = \frac{1}{3}$,

图2中二次谐波与直流分量之比为

$\frac{2}{3} / 2 \cdot 0 = \frac{1}{3}$ 。这点是容易理解的,因为对付氏级数的谐波分析法所得 n 次谐波幅值为

$$Fn = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-j\omega n t} dt$$

对付氏积分的频谱分析法,所得在 ωn 处的频谱密度为

$$F(\omega_n) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-j\omega n t} dt$$

$$\text{故有} \quad Fn = \frac{2}{T} \cdot F(\omega_n) = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot F(\omega_n) \quad (7)$$

即付氏级数的 Fn 与付氏积分的 $F(\omega_n)$ 之间只差固定常数 $\frac{\omega_0}{\pi}$,以上例为证,

$$F_1 = \frac{1}{2} \text{ 而 } F(\omega_1) = \text{公式(4)中(取 } n=1) = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0},$$

$$\therefore F \sqrt{F(\omega_1)} = \frac{\omega_0}{\pi}.$$

由此可见,付氏级数和付氏积分分析方法的差别在于:前者只有离散频谱,后者为连续频谱。这点对于分析整数个正弦波时更清楚,对于图3、5、6三种情况,按付氏级数分析法所得谐波仅有基波而无其它谐波,按付氏积分分析则认为除基波外还有其它谐波,特别是波宽只有一个周期的时候,频谱在 $0 \rightarrow 2\omega_0$ 之间分布得很分散,只是当波形持续时间 τ 很长时(例如图6中 $\tau = 10T$),才明显地集中到 ω_0 处,可是我们所要讨论的是快速保护的输入讯号,它们的持续时间 τ 不可能很长,所以对快速保护输入讯号的谐波分析应该采用付里哀积分的连续频谱方法。

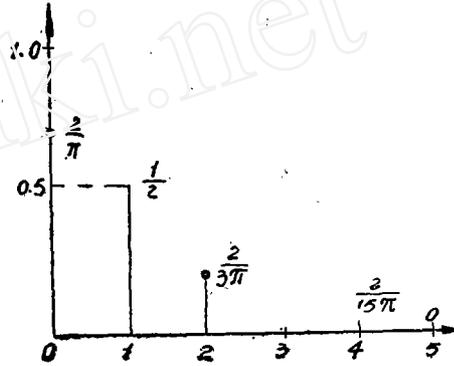


图 7

(三) 输入讯号为 $e^{-t/Ta}$ 时的谐波(频谱)分析

对快速保护说来,经常遇到的另一类输入讯号是非周期的衰减电量
 $e^{-t/Ta} = e^{-\beta t}$ ($\beta = \frac{1}{Ta}$), 所以我们将分析 $f(t) = e^{-\beta t} \quad t \geq 0$

在付氏级数谐波分析法中,第一周期各次谐波幅值大小为

$$C_K = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-\beta t} \cdot e^{-j2\pi K \frac{t}{T}} dt = \frac{-2}{\beta T + j2\pi K} (e^{-[\beta T + j2\pi K] - 1}) \quad (8)$$

$K = 0, 1, 2, 3 \dots$

在付氏积分的频谱分析法中,频谱密度为

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\beta + j\omega}$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\beta \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\beta})^2}} \quad (9)$$

图8表示 $\beta = 10 (Ta = 0.1)$ 时的频谱密度。

但是在快速保护中输入讯号只能是短暂的一段脉冲,所以图8并非快速保护感受的频谱,实际的频谱为

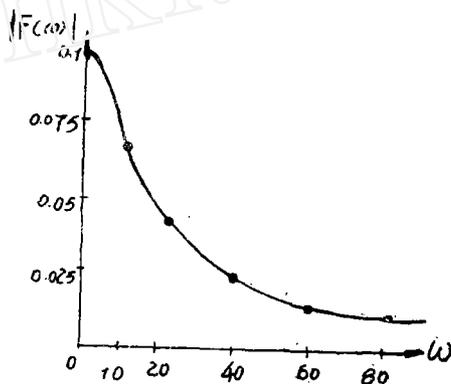


图 8

$$F(\omega) = \int_0^{t_1} e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\beta + j\omega} [1 - e^{-(\beta + j\omega)t_1}] \quad (10)$$

以 $t_1 = 0.02 = T$, $\beta = 10$ 为例, $|F(\omega)|$ 频谱见图9、图10。

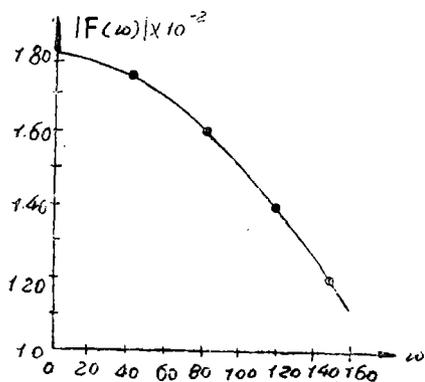


图 9

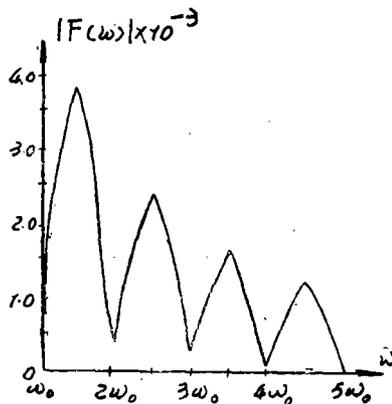


图 10

将图8和图9对比,可知当输入讯号不是全过程($t = 0 \rightarrow \infty$)而仅仅一段($t = 0 \rightarrow 20ms$),

两者的频谱相差很远,例如对 $\omega = 0$ 言,图8 $|F(\omega)| = 0.10$ 而图9则 $|F(\omega)| = 0.018$ 。

对同一段波形(例如 $e^{-\beta t}$ 的第一个周期 $0 \rightarrow 20ms$)按付氏级数分析,由公式(8)得

$$C_0 = \frac{-2}{10 \times 0.02 + j0} [e^{-(10 \times 0.02 + j0)} - 1] = \frac{-2}{0.2} [0.82 - 1] = 1.8$$

此值与图9的 $|F(\omega)|_{\omega=0} = 0.018$ 相差 $\frac{\omega_0}{\pi} = 2f_0 = 100$ 倍,再次说明对一有限

区间内的任意函数,其连续频谱密度 $F(\omega)$ 是以 $\frac{\omega_0}{\pi}$ 的比例尺表示着该段函数作周期重复所对应的离散频谱的包络。

通过以上分析,对快速保护输入讯号的谐波分析有所下几点结论:

1.一般说应当采用付立叶积分的连续频谱分析法。频谱特性不仅是频率的函数,而且是持续时间的函数。

2.付立叶级数用于某一区间的波形分析,所得各次谐波系数与付立叶积分连续频谱的相应频率点的频谱密度只相差一固定常数,但应十分注意,实际的频谱决非付立叶级数所得的线状离散频谱,而是在各次谐波间还存在着其它频率的谐波。

3.保护动作速度愈快,输入讯号持续时间愈短,各次谐波的幅值相差愈小。因此特别快速的保护不能用以工频为基准的谐波特性;从另一方面说,以工频为基准的谐波原理的保护(采用LC谐振滤波或RC双T滤波),动作速度不可能比一个周期更快。

4.对同一个输入讯号,动作速度不同的保护装置感受的输入讯号频谱特性是不同的,越快的保护,越难分清各次谐波的大小。

5.在采用付氏级数的谐波分析法时我们总是以基本工频为准,即其重复周期为 $0.02''$ ($f = 50HZ$),对于输入讯号持续时间 $\tau < 0.02''$ 的短暂脉冲波形,以 $T = 0.02''$ 为重复周期而进行的付氏级数谐波分析结果与直接采用付氏积分频谱分析的结果之间确有固定的比例关系,已如上述。但是若保护动作速度超过一个周期(例如 $30ms$),则这个短暂脉冲(例如以一段正弦波为例)的付氏积分频谱分析(图4)与将该脉冲波形的第一个 $20ms$ 间的一截进行付氏级数谐波分析(结果为纯基波)之间毫无关系,这种离散频谱的某一次谐波大小并不说明保护装置在第一个周期期间感受了这么多谐波分量。正确的分析方法应该是从输入讯号送进保护装置($t = 0$)开始到保护装置动作为止($t = \tau$)的一段讯号波形,用付氏积分的频谱分析法来观察该波形的频谱密度分布情况,并进而根据这个频谱特性,结合保护装置的实际电路参数,用留数定理等方法求解保护装置在这个输入讯号下的动态特性。

据此,我们对本文一开始列举的一些内部短路谐波分析数据和图1的国外资料表示否定态度,认为这些数据不能说明保护装置的动态特性。

(四) LC谐振滤波电路的动态特性

利用谐波原理的保护装置中,经常采用L-C谐振滤波电路进行选频,作为示例,

我们以 RLC 串联电路为代表, 其中 LC 参数符合

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (\omega_0 \text{ 为固有谐振频率})$$

R 表示装置后续电路的输入电阻。

输入讯号 $V(t)$ 是一个短暂的脉冲 (快速保护), 按下式求出它的频谱特性

$$V(\omega) = \int_0^\tau V(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11)$$

$$\text{设 } V(t) = \sin \omega_0 t \quad 0 < t < \tau$$

从静态特性看, 这个输入讯号的频率与 LC 固有谐振频率一致, 输入讯号将畅通地到达输出端电阻 R 上。但是由于输入讯号仅在 $0 < t < \tau$ 的一段间隔中存在, 同时由于 LC 的惯性作用, 使 $i(t)$ 的波形 (即 R 上输出电压波形) 和输入讯号的波形极不相同。对这一动态特性的分析, 我们是从付立叶积分的频谱特性入手, 利用留数定理求时间函数的办法。由 (11) 式得输入讯号的频谱特性

$$V(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [1 - e^{-j\omega\tau} \cos \omega_0\tau] - \frac{j\omega e^{-j\omega\tau} \sin \omega_0\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{即 } V(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [-e^{-j\omega\tau} (\cos \omega_0\tau + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0\tau)] \quad (12)$$

为了求解电流, 当然应该列出图 11 电路的阻抗频谱特性:

$$Z(\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad (13)$$

待求电流的频谱特性为

$$I(\omega) = \frac{V(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{\omega_0 [1 - e^{-j\omega\tau} (\cos \omega_0\tau + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0\tau)]}{(\omega_0^2 - \omega^2) [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]} \quad (14)$$

电流实际值 $i(\tau)$ 为

$$*i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} - (\cos \omega_0\tau + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2) [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]} d\omega \quad (15)$$

这种求解过渡过程方法的物理概念是: 把输入讯号电压分解为无限多个振幅为 $V(\omega) d\omega$ (无限小) 的谐波电压, 因为是线性电路, 故可应用迭加原理, 对每个 $V(\omega) d\omega$ 谐波电压相应应有振幅为无限小的谐波电流 $I(\omega) d\omega = \frac{V(\omega)}{Z(\omega)} d\omega$, 然后对 $\omega = -\infty \rightarrow +\infty$ 求 $\Sigma I(\omega) d\omega$ 总和即得待求电流。

公式 (15) 的解算可用留数定理, 因为我们讨论的问题仅存在于 $t > 0$ 的时候, 即属于单边付立叶积分。

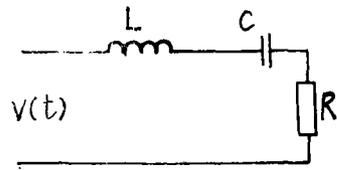


图 11

令公式(14) = $I(\omega) = \frac{I_1(\omega)}{I_2(\omega)}$ 则它的相应时间函数为

$$\sum Res \frac{I_1(\omega) e^{j\omega\tau}}{I_2(\omega)} = j \sum_{K=I}^n \frac{I_1(\omega_K) e^{j\omega_K\tau}}{\left[\frac{d}{d\omega} I_2(\omega) \right]_{\omega=\omega_K}} \quad * \quad (15)$$

ω_K 为 $I_2(\omega) = 0$ 的根, 为此必先求出(14)分母 = 0

时 ω 的解, 骤然一看, $\omega = \pm \omega_0$ 为其解, 实则不然, 因为当 $\omega = \omega_0$ 时, (14)式分子也为 0, 即

$\omega_0 [1 - e^{-j\omega_0\tau} (\cos \omega_0\tau + j \sin \omega_0\tau)] = \omega_0 [1 - e^{-j\omega_0\tau} \cdot e^{j\omega_0\tau}] = 0$ 所以 $\pm \omega_0$ 不是根, 真正的根存在于下面的方程中:

$$R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$$

即 $2j\omega \frac{R}{2L} + (j\omega)^2 - j(j\omega) \frac{1}{\omega C L} = 0$

即 $2j\omega \cdot \alpha - \omega^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

即 $\omega^2 - 2j\alpha\omega - \omega_0^2 = 0$

其根为 $\omega_K = \frac{1}{2} [2j\alpha \pm \sqrt{-4\alpha^2 + 4\omega_0^2}] = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} + j\alpha$

令 $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$

则 $\omega_K = \pm \omega_1 + j\alpha$

知道 ω_K 后, 就可由(16)求解电流的实际值。我们先分析(16)式的分母。

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\omega} I_2(\omega) \right]_{\omega=\omega_K} &= \left\{ \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \cdot \frac{d}{d\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) \right. \\ &\quad \left. + (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{d}{d\omega} \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \right\}_{\omega=\omega_K} \\ &= \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \left[jL + j\frac{1}{\omega^2 C} \right] \right\}_{\omega=\omega_K} \\ &= j \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) \right\}_{\omega=\omega_K} \end{aligned}$$

根据(16)式当 $\omega_K = +\omega_1 + j\alpha$ 时有一个解为

$$\begin{aligned} j \frac{\omega_0 [1 - e^{-j(\omega_1 + j\alpha)\tau} (\cos \omega_0\tau + j \frac{\omega_1 + j\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau)] e^{j(\omega_1 + j\alpha)\tau}}{j[\omega_0^2 - (\omega_1 + j\alpha)^2] \cdot \left[L + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]} \\ = \frac{\omega_0 \cdot (\omega_1 + j\alpha) [e^{j(\omega_1 + j\alpha)\tau} - (\cos \omega_0\tau + j \frac{\omega_1 + j\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau)]}{[\omega_0^2 - (\omega_1 + j\alpha)^2] \left[L(\omega_1 + j\alpha) + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)C} \right]} \quad (18) \end{aligned}$$

* 用付立叶反变换或留数定理求原函数 $i(t)$ 时应该是 $e^{j\omega t}$ 而不是 $e^{j\omega\tau}$, 但我们关心的是 τ 的长短对保护动作的影响, 为此特别解出 $t = \tau$ 的电流 $i(\tau)$, 这个电流正是保护动作时的电流大小。

另一个解为 $\omega_k = -\omega_1 + j\alpha$ 代入(16)得

$$\frac{\omega_0(\omega_1 - j\alpha) [e^{j(-\omega_1 + j\alpha)\tau} - (\cos \omega_0\tau + j \frac{-\omega_1 + j\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0\tau)]}{[\omega_0^2 - (-\omega_1 + j\alpha)^2][L(\omega_1 - j\alpha) + \frac{1}{(\omega_1 - j\alpha)C}]}$$
 (19)

(18) + (19) 就是待求电流的全解, 经过附录中的详细推导得

$$i(\tau) = \frac{1}{R} [\sin \omega_0\tau - \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\alpha\tau} \sin \omega_1\tau]$$
 (20)

当 $\tau = 0$ 时有 $i(0) = 0$, 因为输入讯号为 $[\sin \omega_0\tau]_{t=0} = 0$, 合理。

可见公式(20)对谐振于 ω_0 的 RLC 串联电路是正确的。

今设 $\omega_0 = 314$ ($f = 50\text{HZ}$), $C = 1\mu\text{f}$, 则 $L \frac{1}{\omega_0^2 C} \approx 10$ 亨

又设 $R = 1\text{K}\Omega$ 则 $\alpha = \frac{R}{2L} = 0.5 \times 10^2$, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \approx \omega_0^2$

$$\text{由(10) } i(\tau) = \frac{1}{10^3} [\sin \omega_0\tau - e^{-0.5 \times 10^2 \tau} \sin \omega_0\tau]$$
 (21)

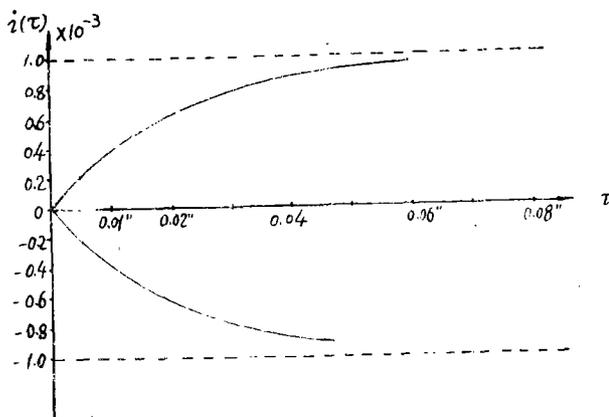


图 12

上式的包络线如图12所示。由此可见, 当有 $V(t) = \sin \omega_0 t$ 讯号突然加到调谐于 ω_0 的 RLC 的串联谐振电路时, 电路中并不立即产生频率为 ω_0 的电流, 相反的该电流的大小与 τ 的长短有关, 由零逐渐增大, 上升速度以时间常数 $T_a = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}$ 按指数规律变化, 最终达到 $\frac{1}{R}$ 的稳态幅值。因此在 $\alpha \ll \omega_0$ (即 $R \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的 RLC 谐振滤波电路中, 如果选择 ω_0 的电流作为保护的动作用, 则路护的动作速度将受 $T_a = \frac{2L}{R}$ 的限制, 不可能很快动作; 如果 ω_0 的电流作为制动量, 则由于此制动量不能迅速建立而可能导致保护误动作。

设某一晶体管保护中, $\omega_0 = 3 \times 314$ (调谐在三次谐波频率), $C = 1 \mu\text{f}$ 则 $L \approx 1$ 亨, 若 $R = 1 \text{ K}\Omega$, 则 $\alpha = \frac{10^3}{2L} = 0.5 \times 10^3$, 此时 $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \approx 0.75 \times 10^6$, $\omega_1 \approx 0.86 \times 10^3$, $\frac{\omega_0}{\omega_1} = 1.1$, $T\alpha = \frac{1}{\alpha} = 2 \text{ ms}$, 这样对保护的動作特性影响就不大了。若 R 过大, 则在 RLC 谐振电路中建立频率为 ω_0 的电流的速度很高, 但在暂态过程中将有很大的电流冲击 (见公式(20)的第二项 $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ 很大), 它可能使保护瞬时误动或延滞動作

通过以上分析, 使我们了解到在设计 RLC 谐振滤波电路参数时, 既要注意到不要选取太小的 R 值, 以免被选频率的电流建立太慢, 又要注意 R 不要过大, 以防电流暂态波形严重畸变, 同样将妨害快速保护的正確工作。

以上讨论的是对电源频率等于 $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ 的情况。实际上在 LC 调谐时, 所得谐振频率并非 ω_0 而是 $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{P}{2L}\right)^2}$ (如果在调谐时未包括负载电阻, 则 R 表示电感线卷的电阻), 下面我们假定电源频率等于 ω_1 时即

$$V(t) = \sin \omega_1 t \quad 0 < t < \tau$$

和前面一样可导出

$$i(\tau) = \frac{1}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega_1^2)L} \left\{ \alpha\omega_1 \cos \omega_1 \tau (1 - e^{-\alpha\tau}) + \sin \omega_1 \tau [2\omega_1^2 - e^{-\alpha\tau}(\omega_1^2 + \omega_0^2)] \right\} \quad (22)$$

若令 $\omega_0 \approx \omega_1$, 则

$$i(\tau) = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega_1^2)L} [\alpha\omega_1 \cos \omega_1 \tau + 2\omega_1^2 \sin \omega_1 \tau] \quad (23)$$

当 $\tau = 0$ 时 $i(0) = 0$ 是合理的。

$$\text{当 } \tau \rightarrow \infty \text{ 时 } i(\tau) \rightarrow \frac{\alpha\omega_1 \cos \omega_1 \tau + 2\omega_1^2 \sin \omega_1 \tau}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega_1^2)L} \text{ 设 } \alpha = 0$$

即 $R = 0$, 则 $i(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \infty$, 这也是合理的, 因为 LC 串联谐振电路当 $R = 0$ 时将有极大的稳态电流产生。

(23) 式中当 $R = 1 \text{ K}$, $L = 10$ 亨, $C = 1 \mu\text{f}$ 时 $\omega_1 \approx 314$, $\alpha = 0.5 \times 10^3$ $\therefore \alpha\omega_1 \ll 2\omega_1^2$, 故 $\alpha\omega_1(\cos \omega_1 \tau)$ 项不起主要作用, 如果将它略去不计, 则 $i(\tau)$ 成为
$$\frac{2\omega_1^2}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega_1^2)L} (1 - e^{-\alpha\tau}) \sin \omega_1 \tau \quad (24)$$

这样, 当 $V(t) = \sin \omega_1 t$ 加于 RLC 谐振选频电路时, 所得电流仍与 τ 的长短有关, 由零按指数规律逐渐上升至最终值

$$\frac{2\omega_1^2}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega_1^2)L} \approx \frac{2\omega_1^2}{4\omega_1^2\alpha L} = \frac{1}{2\alpha L} = \frac{1}{R} \text{ 这显然是正确的。}$$

最后, 我们再分析一种更为实际的情况, 即 RLC 谐振电路已选定为

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

考虑到电力系统实际频率的波动, 设讯号电压为 $V(t) = \sin \Omega t$, $0 < t < \tau$, $\Omega \approx \omega_0$ 或 ω_1 。

和前面分析完全一样, 谐振电路中的电流为

$$i(\tau) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} - (\cos \Omega\tau + j\frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega\tau)}{(\Omega^2 - \omega^2)[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]} d\omega$$

仍由留数定理求解。先求分母的根, 前面已经指出 $\omega = \pm \Omega$ 不是根, 因为 $\omega = \Omega$ 时分子也等于零了, 真正的根由

$$R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0 \quad \text{解得为}$$

$$\omega_R = \pm \omega_1 + j\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{分母}]}{d\omega} \Big|_{\omega = \omega_R} &= (\Omega^2 - \omega^2)j[L + \frac{1}{\omega^2 C}] \Big|_{\omega = \omega_R} \\ &= (\Omega^2 - \omega^2)j[\omega L + \frac{1}{\omega C}] \frac{1}{\omega} \Big|_{\omega = \omega_R} \\ &\approx \frac{j}{\pm \omega_1 + j\alpha} [\Omega^2 - (\pm \omega_1 + j\alpha)] \cdot 2\omega_1 L \end{aligned}$$

$$[\text{分子}] \Big|_{\omega = \omega_R} = \Omega [e^{j(\pm \omega_1 + j\alpha)\tau} - (\cos \Omega\tau + j\frac{\pm \omega_1 + j\alpha}{\Omega} \sin \Omega\tau)]$$

经过计算, 在令 $L = 1$ 时有

$$i(\tau) = \frac{\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2} \{ e^{-\alpha\tau} [(\Omega_2 - \omega_0^2) \cos \omega_1 \tau - \frac{\alpha}{\omega_1} (\Omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_1 \tau] - (\Omega^2 \omega_0^2) \cos \Omega\tau + 2\alpha \Omega \sin \Omega\tau \} \quad (25)$$

当 $\Omega = \omega_0$ 同时计及 $\frac{1}{2\alpha} = \frac{L}{R} = \frac{1}{R}$ 则上式 = (20), 当 $\Omega = \omega_1$ 时则上式 = (22), 所以上式是正确的。

我们以 $V(t) = \sin \Omega t$ 加在 $R L C$ 串联电路中, $0 < t < \tau$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2, \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

为例, 总结说明在快速保护中的谐波(频谱)分析和特性。

图13是对 $V(t) = \sin \Omega t$ 作频谱分析的结果, 我们知道, 频谱特性是频率 ω 的函数, 也是持续时间 τ ($\tau = n\frac{T}{2}$) 的函数, 当 $\tau = 0.01''$ (即 $\Omega\tau = \pi$, $n = 1$) 时, 频谱特性如图13中 $0-a-b-c$, 在 $\omega = 0 \rightarrow 2\Omega$ 之间, 频谱密度分布较均匀而且是连续减小的当 $\tau = 0.02''$ ($\Omega\tau = 2\pi$, $n = 2$) 时, 频谱特性为 $0-d-e-f$, 在 $\omega = \Omega$ 处附近出现最大值, 但还不太显著, 当 $\tau = 0.1''$ ($\Omega\tau = 10\pi$, $n = 10$) 时频谱特性为 $0-g-h-k-s$, 在 $\omega = \Omega$ 处出现较显著的尖峰, 但其它频率的频谱密度还有一定大小。

对于某一频率，电流大小与 τ 的关系也在图13中也表示了，例如对于 $\omega = \Omega$ ，频谱密度由下式决定

$$\Omega |F(\omega)| = n \frac{T}{4} \Omega = n \frac{1}{4f} \cdot 2\pi f = \frac{n\pi}{2}$$

反映在图13中为直线 beg 。

对于 $\omega = 2\Omega$ ，在 $\tau = n \frac{T}{2}$ ($n = 2, 4, 6, \dots$) 时频谱密度为 0。

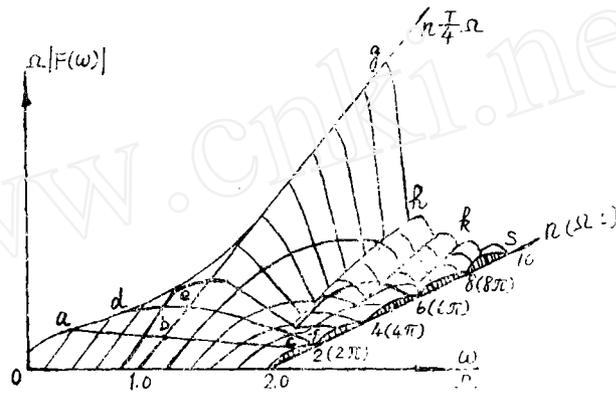


图 13

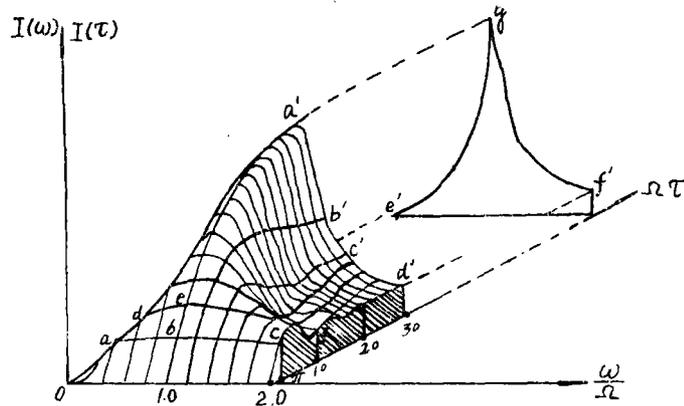


图 14

图14表示 $R L C$ 串联电路中的电流频谱特性。同样对不同的时间 τ ，频谱特性也是不同的。例如当 $\Omega \tau = \pi$ 时，频谱特性为 $a-b-c$ ，注意这时的频谱密度非常均匀，甚至 $\omega = 2\Omega$ 的频谱密度不比 $\omega = \Omega$ 的低，这和图13中 c 点比 b 点要低是明显不同的，原因是 LC 元件惯性的作用，使电路的选频能力还不能表现出来；随着时间 τ 的增长，电路的选频能力逐渐表现出来，例如 $\omega_0 \tau = 10$ 时（比 $\tau = 3 \frac{T}{2}$ 略长些），频谱特性为 $d-e-f$ ； $\omega_0 \tau = 30$ 时（比 $\tau = 5T$ 略短些），频谱特性为 $a'-b'-c'-d'$ ， $\omega = \omega_0$ 处已有

明显的尖峰；直到 $\tau = \infty$ ，即稳态时，频谱特性完全呈现一个谐振电路的静态频率特性 $e'g'f'$ 。

在图14中，当 $\omega = \omega_0$ 时 $I(\tau)$ 以指数曲线 $b e a' g'$ 变化，它表示：一个频率为 Ω 的正弦波的一截 ($0 < t < \tau$) 讯号电压加到调谐于 ω_0 ($\approx \Omega$) 的 RLC 谐振电路时，具有频率为 ω_0 的电流是由零开始按指数规律随 τ 逐渐上升的，如果保护动作极快， τ 很小，则频率为 ω_0 的电流并不显著表现出来，即电路的选频作用只有在 τ 足够长时才充分显示。当然这一结论是建立在 R 较小 ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) 的前提下的 (如图12)

(五) 双T滤波电路的动态特性

在快速晶体管保护装置中，作为低频滤波电路还经常采用双T电路(如图15所示)，它的等效电路(图15中的II型电路)参数为

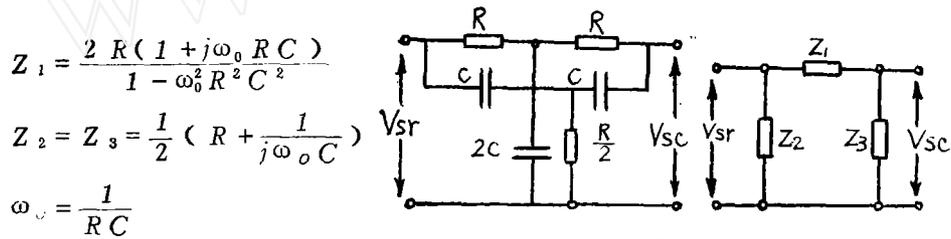


图 15

双T电路的传递函数为

$$Z_1 = \frac{2R(1 + j\omega_0 RC)}{1 - \omega_0^2 R^2 C^2}$$

$$Z_2 = Z_3 = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{j\omega_0 C} \right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$G(\omega) = \frac{V_{sc}}{V_{sr}} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + j4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

今设 $V_{sr} = \sin\omega_0 t$, $0 < t < \tau$, 则其频谱特性为

$$V_{sr}(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} [1 - e^{-j\omega\tau} (\cos\omega_0\tau + j\frac{\omega}{\omega_0} \sin\omega_0\tau)]$$

通过双T电路后的输出电压为

$$V_{sc}(\omega) = V_{sr}(\omega)G(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau} (\cos\omega_0\tau + j\frac{\omega}{\omega_0} \sin\omega_0\tau)}{\omega_0 [1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)]}$$

$$= \frac{V_1(\omega)}{V_2(\omega)}$$

先求 $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 0$ 的根，有

$$\omega_K = j\omega_0 (2 \pm \sqrt{3})$$

$$\text{又 } \frac{d}{d\omega} V_2(\omega) = \omega_0 \left[-2\frac{\omega}{\omega_0^2} + j\frac{4}{\omega_0} \right] = j4 - 2\frac{\omega}{\omega_0}$$

由留数定理得

$$V_{sc}(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})\tau} (e^{\sqrt{3}\omega_0\tau} - 1) - \sin\omega_0\tau$$

上式当 $\tau = 0$ 时 $V_{sc} = 0$ ，所以是合理的。

可见阻止基频 ω_0 的双 T 阻波电路，当通入的讯号 $\sin\omega_0 t$ 是 $0 < t < \tau$ 截时，将仍有输出，而且主要由 $\sin\omega_0\tau$ 决定输出电压的大小。

图16画出输入讯号为 $\sin\omega_0 t$ ， $0 < t < \tau$ ，双 T 电路的输出电压与 τ 的关系。

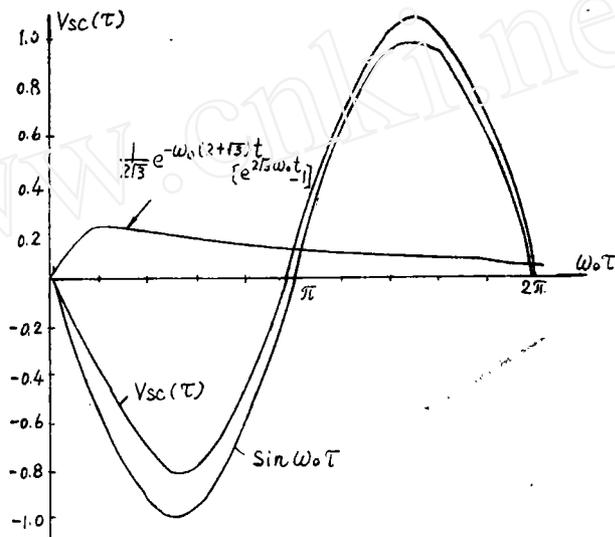


图 16

若 $t \rightarrow \infty$ ，由于 $\sin\omega_0 t$ 不满足绝对可积条件，改写

$$V_{sr} = \sin\omega_0 t e^{-Ct} \quad t > 0 \quad C \text{ 为正实数}$$

$$V_{sr} = 0 \quad t < 0$$

$$\text{则 } V_{sr}(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (C + j\omega)^2}, \quad \lim_{C \rightarrow 0} V_{sr}(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

从而有

$$\begin{aligned} V_{sc}(\omega) &= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + j4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \\ &= \frac{1}{\omega_0 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + j4\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right\}} \end{aligned}$$

由留数定理得

$$\begin{aligned} V_{sc}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [e^{-\omega_0(2-\sqrt{3})t} - e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\omega_0(2+\sqrt{3})t} [e^{2\sqrt{3}\omega_0 t} - 1] \end{aligned} \quad (26)$$

可见当输入讯号为持续正弦波时， ω_0 频率的正弦波完全被调谐于 ω_0 的双T电路阻塞，仅在暂态过程中出现衰减的非周期分量。在经历半个周期后，输出量已衰减到约13%，即近于输出为零了。

由此使我们更清楚地看到输入讯号不是持续的情况下滤波电路动态特性与静态特性是迥然不同的。

若输入讯号为 $V_{sr} = e^{-\beta t}$ $0 \leq t \leq \tau$ ，相应有

$$V_{sr}(\omega) = \int_0^\tau e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\beta + j\omega} [1 - e^{-(\beta + j\omega)\tau}]$$

通过上述双T电路，输出为

$$V_{sc}(\omega) = \frac{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2][1 - e^{-(\beta + j\omega)\tau}]}{(\beta + j\omega) \left\{ [1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2] + j4(\frac{\omega}{\omega_0}) \right\}}$$

解之得*

$$\begin{aligned} V_{sc}(\tau) &= \frac{-2\omega_0 \left\{ (2 + \sqrt{3}) [1 - e^{-\beta\tau} + \omega_0(2 + \sqrt{3})\tau] e^{-\omega_0(2 + \sqrt{3})\tau} - (2 - \sqrt{3}) [1 - e^{-\beta\tau} + \omega_0(2 - \sqrt{3})\tau] e^{-\omega_0(2 - \sqrt{3})\tau} \right\}}{\sqrt{3} [\beta - \omega_0(2 + \sqrt{3})] [\beta - \omega_0(2 - \sqrt{3})]} \\ &= \frac{-2\omega_0 \left\{ (2 + \sqrt{3}) [e^{-\omega_0(2 + \sqrt{3})\tau} - e^{-\beta\tau}] - (2 - \sqrt{3}) [e^{-\omega_0(2 - \sqrt{3})\tau} - e^{-\beta\tau}] \right\}}{\sqrt{3} [\beta - \omega_0(2 + \sqrt{3})] [\beta - \omega_0(2 - \sqrt{3})]} \end{aligned}$$

当 $\tau = 0$, $V_{sc}(\tau) = 0$, 但 $V_{sr}(t) = e^{-\beta t} \Big|_{t=0} = 1$, 似乎在

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{分母})}{d\omega} \Big|_{\omega = \omega_k} &= (\beta + j\omega) \left[-2 \cdot \frac{\omega}{\omega_0^2} + j \frac{4}{\omega_0} \right] \omega = \omega_k \\ &= [\beta - \omega_0(2 \pm \sqrt{3})] [j4 - 2j(2 \pm \sqrt{3})] \frac{1}{\omega_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{sc}(\tau) &= \frac{[1 + (2 \pm \sqrt{3})^2][1 - e^{-[\beta - \omega_0(2 \pm \sqrt{3})]\tau}] e^{-\omega_0(2 \pm \sqrt{3})\tau}}{[\beta - \omega_0(2 \pm \sqrt{3})] [4 - 2(2 \pm \sqrt{3})] / \omega_0} \\ &= \frac{\mp 2\omega_0 \left\{ (2 \pm \sqrt{3}) [1 - e^{-[\beta - \omega_0(2 \pm \sqrt{3})]\tau}] e^{-\omega_0(2 \pm \sqrt{3})\tau} \right\}}{\sqrt{3} [\beta - \omega_0(2 \pm \sqrt{3})]} \end{aligned}$$

$t = 0$ 给上 $V_{sr} = 1$ 时，双T电路的两个串联的电容好比被短接， V_{sc} 似应等于1。实际上这里讨论的是即时频谱 $V_{sr}(\omega)$ 和 $V_{sc}(\omega)$ ，所谓 $\tau = 0$ 实指输入讯号持续时间为0，因此输出 $V_{sc}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0$ 是合理的。

若输入讯号为 $V_{sr}(t) = e^{-\beta t}$ $0 < t \rightarrow \infty$ ，则

* $V_{sc}(\omega)$ 式分母 = 0 之根为 $\omega_k = j\omega_0(2 \pm \sqrt{3})$ ，而 $\omega = j\beta$ 不是根，因分子也为零了。

$$V_{sr}(\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega}$$

通过双T电路的输出为

$$V_{sc}(\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{(\beta + j\omega) \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j4 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \right]}$$

解之得

$$V_{sc}(t) = \frac{(4 + 2\sqrt{3})e^{-\omega_0(2 + \sqrt{3})t}}{-\sqrt{3}[\beta - \omega_0(2 + \sqrt{3})]} + \frac{(4 - 2\sqrt{3})e^{-\omega_0(2 - \sqrt{3})t}}{\sqrt{3}[\beta - \omega_0(2 - \sqrt{3})]} + \frac{(\omega_0^2 + \beta^2)e^{-\beta t}}{\omega_0^2 + \beta^2 - 4\beta\omega_0}$$

上式当 $t=0$ 时有

$$V_{sc}(t)_{t=0} = \frac{12\beta\omega_0}{-3(\omega_0^2 + \beta^2 - 4\beta\omega_0)} + \frac{\omega_0^2 + \beta^2}{\omega_0^2 + \beta^2 - 4\beta\omega_0} = \frac{\omega_0^2 + \beta^2 - 4\beta\omega_0}{\omega_0^2 + \beta^2 - 4\beta\omega_0} = 1$$

这说明当输入讯号为持续的 $e^{-\beta t}$ 时, 在突然给予双T电路时, 输出讯号确实在 $t=0$ 的瞬间等于 1, 即与输入讯号相同。这就证明以上分析和计算是正确的。

为了进行对比, 我们将用同样的讯号给予调谐于 ω 的RLC谐振电路。

设输入电压为 $e^{-\beta t}$, $0 < t < \tau$, 通过RLC谐振滤波电路时输出电流为

$$I(\omega) = \frac{F(\omega)}{Z(\omega)} = \frac{1 - e^{-(\beta + j\omega)\tau}}{(\beta + j\omega) \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]} = \frac{I_1(\omega)}{I_2(\omega)}$$

$$\text{相应的 } I(\tau) \text{ 实际值为 } j \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{I_1(\omega) e^{j\omega\tau}}{\left[\frac{d}{d\omega} I_2(\omega) \right]_{\omega = \omega_K}} d\omega$$

其中 ω_K 为 $I_2(\omega) = 0$ 之根, 其值是

$$\omega_K = \pm \omega_1 + j\alpha, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

从而有

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\omega} I_2(\omega) \right]_{\omega = \omega_K} &= \left[\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \frac{d}{d\omega} (\beta + j\omega) \right. \\ &+ \left. (\beta + j\omega) \frac{d}{d\omega} \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \right]_{\omega = \omega_K} \\ &= \left[(\beta + j\omega) \left(jL + j\frac{1}{\omega^2 C} \right) \right]_{\omega = \omega_K} \end{aligned}$$

一个解为

$$j \frac{1 - e^{-[\beta + j(\omega_1 + \alpha)]\tau}}{j[\beta + j(\omega_1 + j\alpha)] \left[L + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

$$= \frac{1 - e^{-(\beta - \alpha + j\omega_1)\tau}}{(\beta - \alpha + j\omega_1) \left[L + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

另一个解为

$$\frac{1 - e^{-(\beta - \alpha - j\omega_1)\tau}}{(\beta - \alpha - j\omega_1) \left[L + \frac{1}{(-\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

故 $e^{-\beta t}$ 电压通过 RLC 谐振滤波电路时输出电流 (亦即在 R 上的输出电压) 为

$$I(\tau) = \frac{1 - e^{-(\beta - \alpha + j\omega_1)\tau}}{(\beta - \alpha + j\omega_1) \left[L + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

$$+ \frac{1 - e^{-(\beta - \alpha - j\omega_1)\tau}}{(\beta - \alpha - j\omega_1) \left[L + \frac{1}{(-\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

当 $t = 0$ 时输入电压为 $e^{-\beta t}|_{t=0} = 1$, 但 τ 表示输入讯号持续时间, 所以 $I(\tau)|_{\tau=0} = 0$ 。故上式是正确的。

现在再分析 $f(t) = e^{-\beta t}$ $t \rightarrow \infty$ 的情况。

$$I(\omega) = \frac{1}{(\beta + j\omega) \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}$$

相应地有

$$I(t) = \frac{e^{-\beta t}}{R - \beta L - \frac{1}{\beta C}} + \frac{e^{(-\alpha + j\omega_1)t}}{(\beta - \alpha + j\omega_1) \left[L + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

$$+ \frac{e^{(-\alpha - j\omega_1)t}}{(\beta - \alpha - j\omega_1) \left[L + \frac{1}{(-\omega_1 + j\alpha)^2 C} \right]}$$

可见, 对于 RLC 电路, 纵然输入讯号 $e^{-\beta t}$ 是持续的, 但 $t = 0$ 时的输出量仍然是 0 , 原因当然是由于电路中存在电感 L 造成的, 这与 RC 双 T 电路是绝然不同的。

最后再回后讨论双 T 电路的一般情况, 设双 T 电路的阻波频率为 ω_3 , 输入讯号为 $\sin \omega_0 t$, $0 < t < \tau$, 则输出量为

$$V_{sc}(\omega) = \frac{\omega_0 [1 - e^{-j\omega\tau} (\cos \omega_0 \tau + j \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t)] [1 - (\frac{\omega}{\omega_3})^2]}{(\omega_0^2 - \omega^2) [1 - (\frac{\omega}{\omega_3})^2 + j 4 (\frac{\omega}{\omega_3})]}$$

其解为

$$V_{sc}(\tau) = \frac{-2(2+\sqrt{3})\omega_0\omega_3[e^{-\omega_3(2+\sqrt{3})\tau}(\cos\omega_0\tau - \frac{\omega_3(2+\sqrt{3})}{\omega_0}\sin\omega_0\tau)]}{\sqrt{3}[\omega_0^2 + \omega_3^2(2+\sqrt{3})^2]} + \frac{2(2-\sqrt{3})\omega_0\omega_3[e^{-\omega_3(2-\sqrt{3})\tau}(\cos\omega_0\tau - \frac{\omega_3(2-\sqrt{3})}{\omega_0}\sin\omega_0\tau)]}{\sqrt{3}[\omega_0^2 + \omega_3^2(2-\sqrt{3})^2]}$$

输出波形十分复杂

若输入讯号为持续的 $\sin\omega t$, $0 < t \rightarrow \infty$, 则有

$$V_{sc}(\omega) = \frac{\omega_0[1 - (\frac{\omega_0}{\omega_3})^2]}{(\omega_0^2 - \omega^2)[1 - (\frac{\omega}{\omega_3})^2 + j4(\frac{\omega}{\omega_3})]}$$

其解为

$$V_{sc}(t) = \frac{-j[1 - (\frac{\omega_0}{\omega_3})^2]}{[1 - (\frac{\omega_0}{\omega_3})^2]^2 + (4\frac{\omega_0}{\omega_3})^2} \left\{ [1 - (\frac{\omega_0}{\omega_3})] \cos\omega_0 t + 4\frac{\omega_0}{\omega_3} \sin\omega_0 t \right\} + \frac{2\omega_0\omega_3}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{-(2+\sqrt{3})e^{-\omega_3(2+\sqrt{3})t}}{[\omega_0^2 + \omega_3^2(7+4\sqrt{3})]} + \frac{(2-\sqrt{3})e^{-\omega_3(2-\sqrt{3})t}}{[\omega_0^2 + \omega_3^2(7-4\sqrt{3})]} \right\}$$

当 $\omega_0 = \omega_3$ 时, 上式中 $\cos\omega_0 t$ 与 $\sin\omega_0 t$ 项消失, 与前面的结果 (26) 式一样。当 ω_0 与 ω_3 接近但并不完全相等时, 则输出量中主要是衰减的非周期分量, 同时将有少量的 $\sin\omega_0 t$ 成分, 至于 $\cos\omega_0 t$ 成分则更少了。

(六) 基本元件典型电路和BCD—24装置的动态试验分析

下面我们以几种基本元件和典型电路为例, 进行一些动态试验和分析, 并对已研制成的BCD—24变压器差动保护装置观察其性能。

1. 电抗变压器DKB

对气隙 $\delta = 1\text{ mm}$ 或 4 mm 的电抗变压器, 原边输入持续期长短不同的各种电流波形 I_λ , 观察其付边输出电压 $U_{出}$ 。由于DKB付方负载阻抗大(实验为付方开路), 所以它的暂态过程极短, 这从示波图17、18、19中可看得很清楚。

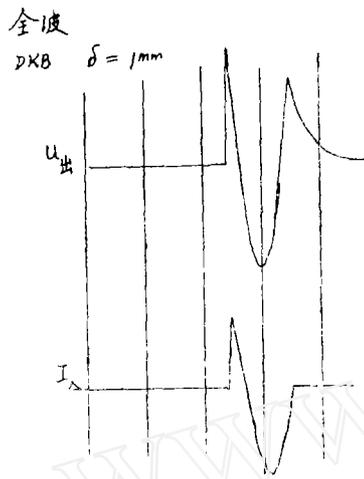


图 17

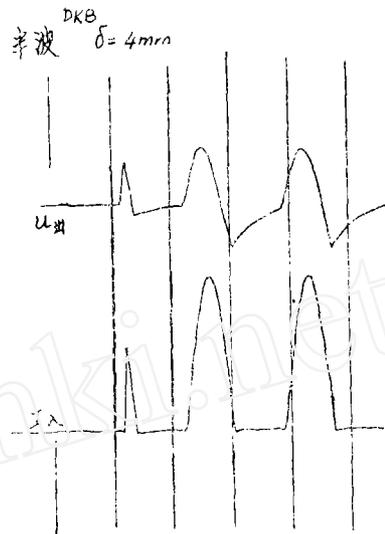


图 18

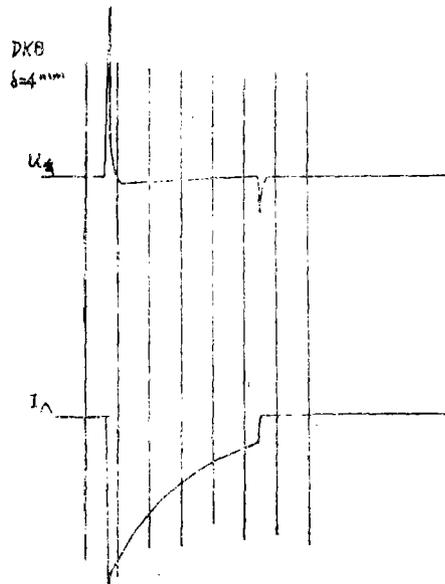


图 19

2. 50Hz 双T 阻波电路

示波图20和21中，表示输入电压 $U_{入}$ 为50Hz正弦波，持续期一个稍长（4~5周期），一个稍短（小于一周）。当持续期很短时（图21），其输出电压相当大，完全表现不出双T电路的阻波作用了。显然，同为正弦波输入电压，由于持续期不一样，输出电压的频谱特性将有很大差别。

示波图22表示输入50Hz正弦半波电压时的情况，开始输出波形有明显暂态特性，

大约在小于一周的暂态过程后，输出电压趋于稳定，表现出 50Hz 的阻波性能。

示波图23为输入短暂非周期分量电压的情况，在经历不到半个周期的暂态过程后，输出电压呈现非周期性质。

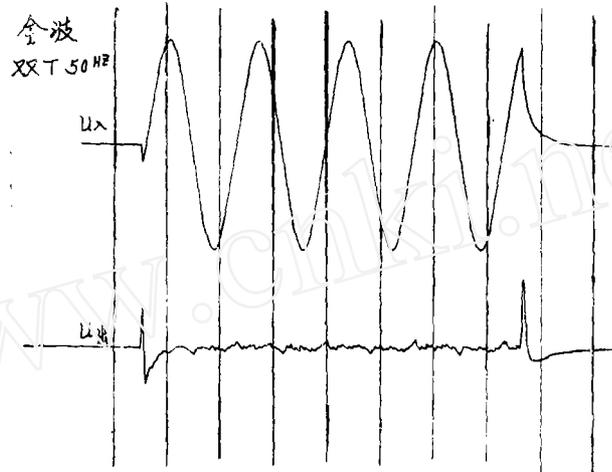


图 20

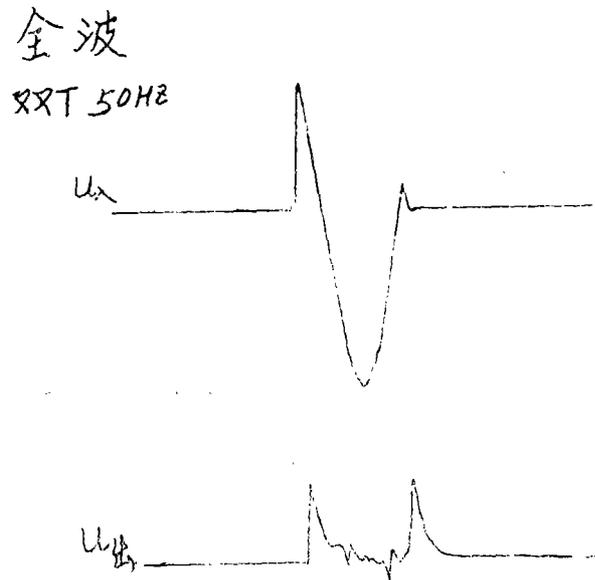


图 21

半波
50Hz双T

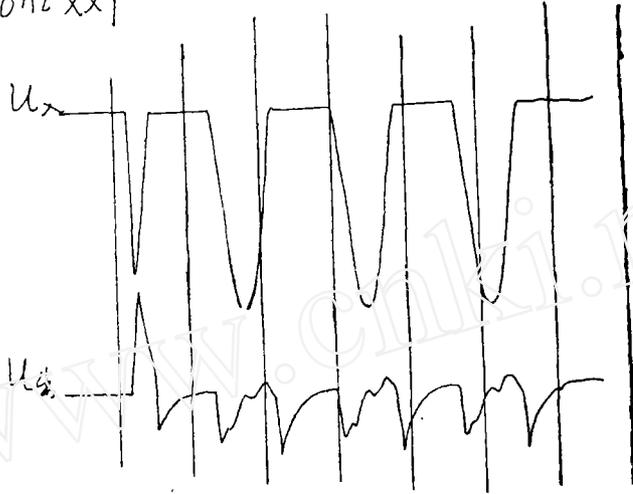


图 22

非周
双T 50Hz

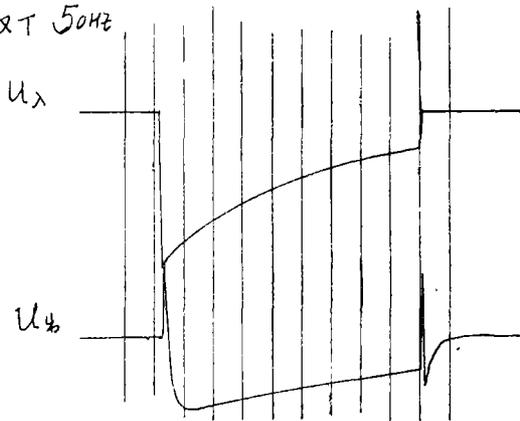


图 23

3. 100 Hz 双 T 阻波电路

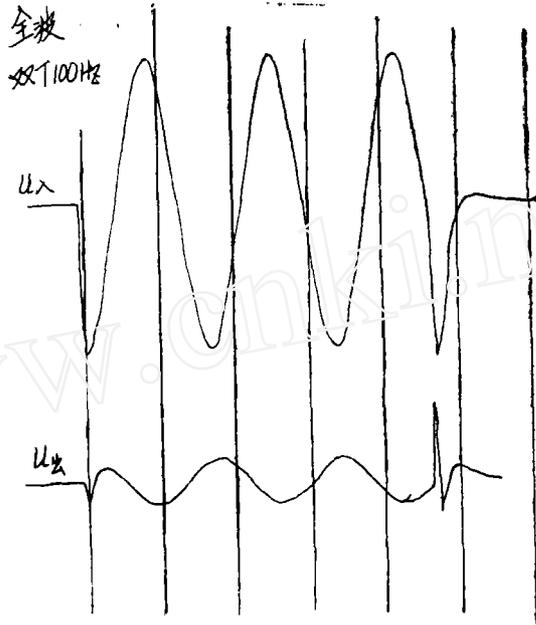


图 24

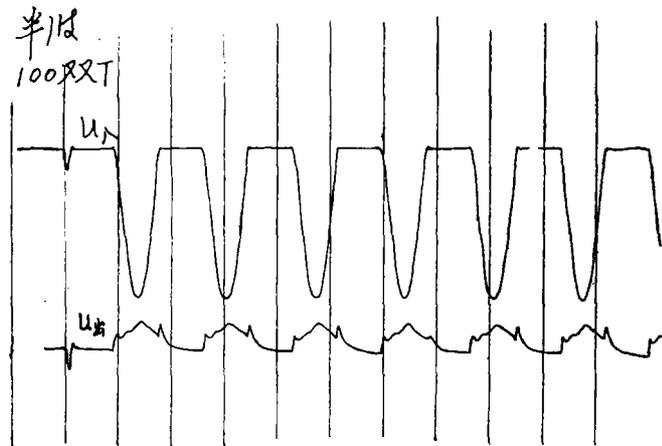


图 25

小周
双T 100Hz

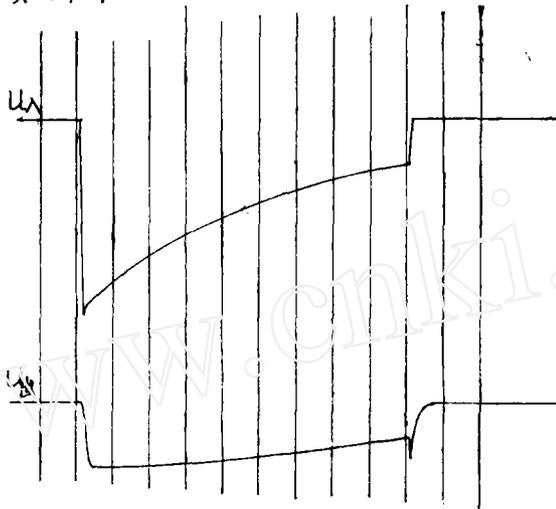


图 26

4. RLC 50Hz 串联谐振电路

全波
串联谐振
50Hz

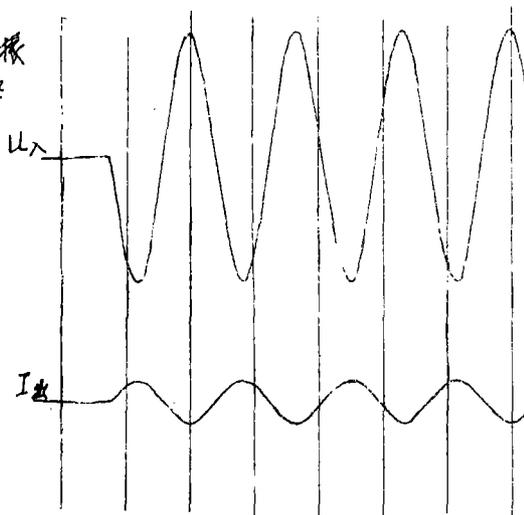


图 27

半波
串联谐振 50Hz

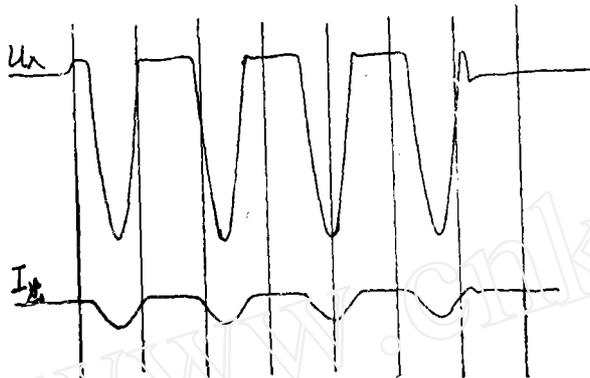


图 28

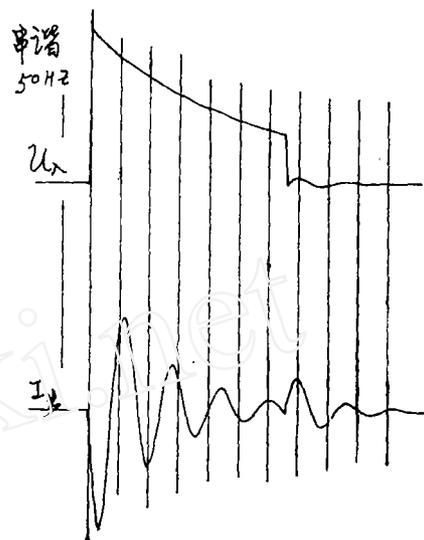


图 29

从示波图27和28可见，这种选频电路对周期性输入电压表现很好的输出特性，但当有非周期性输入电压时，电路呈现50Hz振荡特性，因为这个电路是用在动作量一方的，必须防止这个振荡电压引起误动作。

5. RLC100Hz串联谐振电路

全波
串联谐振 100Hz (2mf)

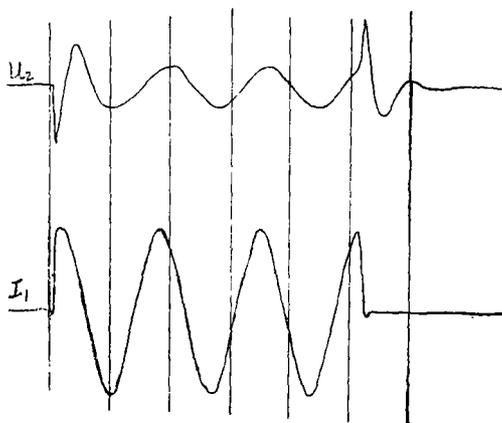


图 30

半程
 串联谐振 100Hz

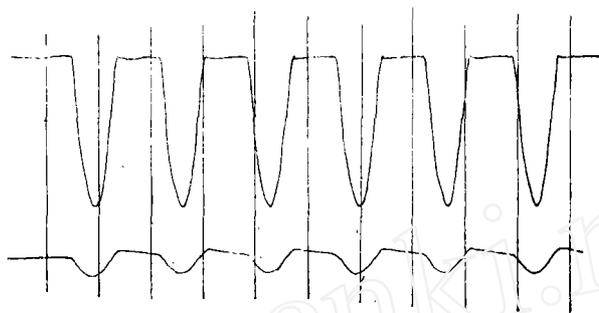


图 31

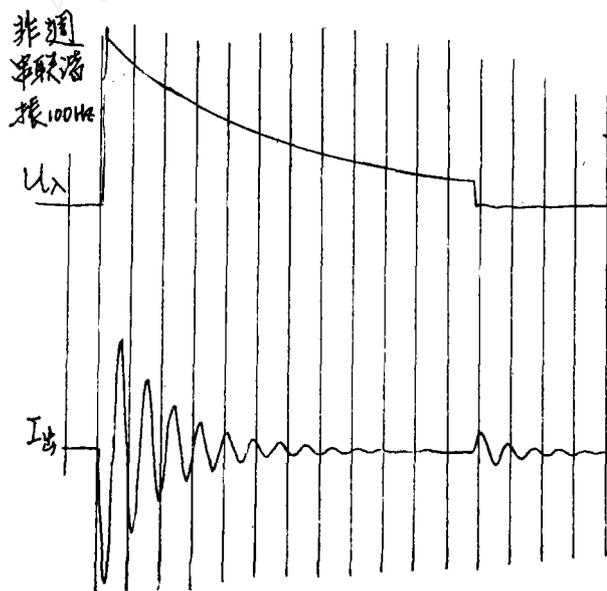


图 32

从图30中可以看出， $R L C$ 串联谐振电路也是有一个短暂的过渡过程的，当输入电流的初相角不是零（即起始电流不为零）时，输出电压将出现一个极短的尖峰。对比图27，由于输入电压在起始瞬间为零，所以输出电流（也即 R 上的输出电压）不出现过渡过程。

示波图32表现了这个电路的 $100 H Z$ 振荡特性，用在差动保护中作为制动量的选频回路将有助于防止误动，当然在内部故障时，这个电路的特性将使保护装置动作速度减慢。

*BCD-24*型变压器差动保护装置是以二次谐波为主的高次谐波制动原理，应用了 50Hz 和 100Hz 的两个双 T 电路作为选频回路。下面的几张示波图 33、34、35、36、37 是该装置的试验结果。

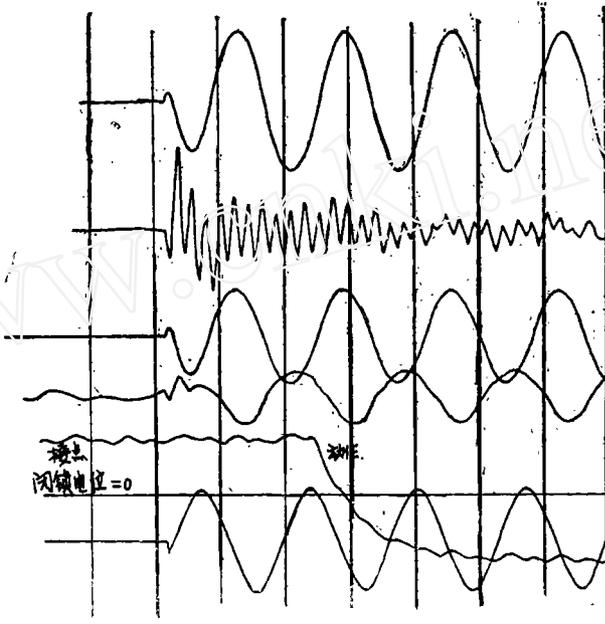


图 33

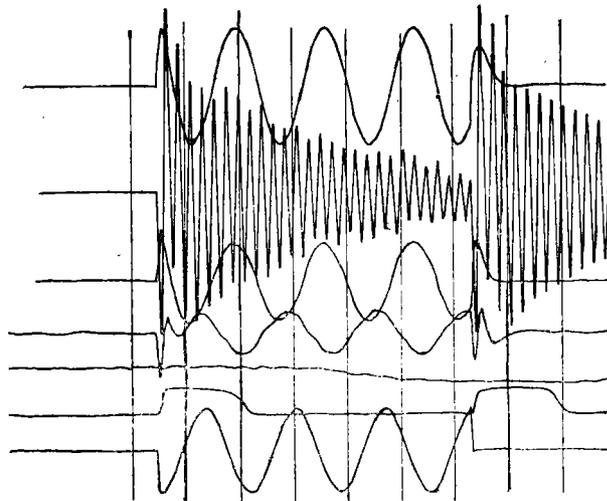


图 34

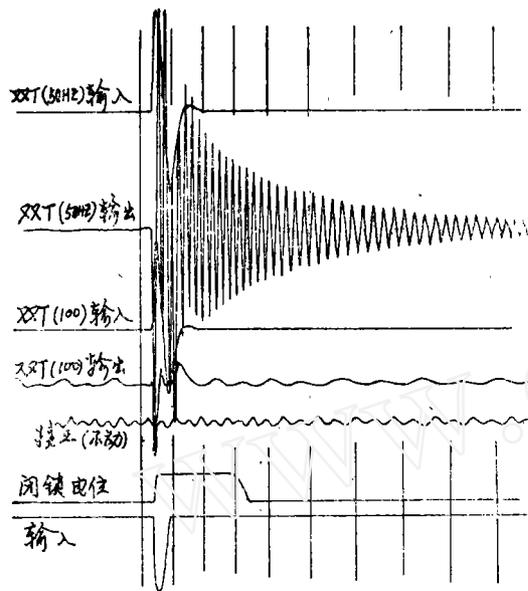


图 35

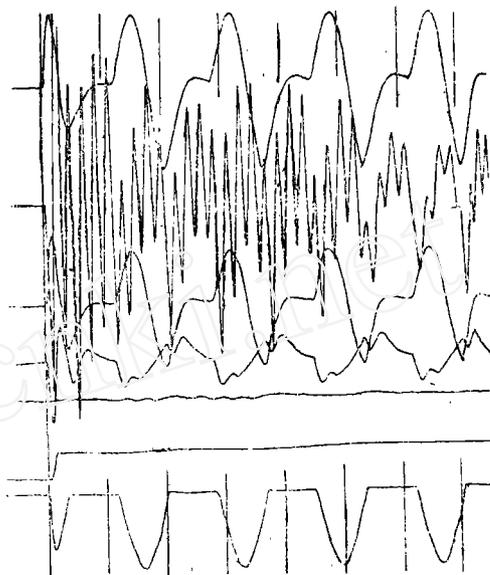


图 36

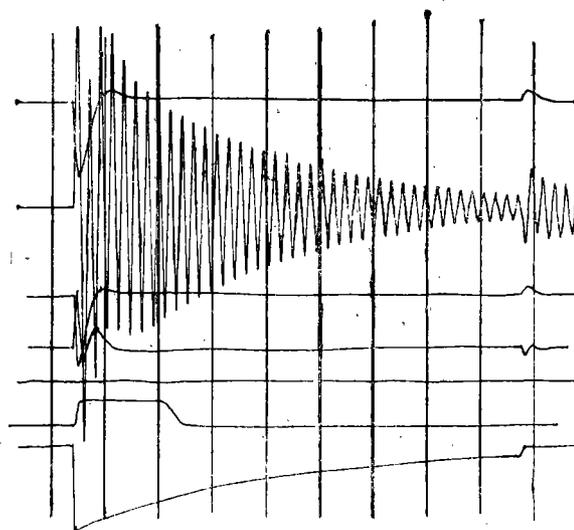


图 37

示波图共七线，自上而下为：

- ① 50 Hz 双 T 阻波电路输入波形
- ② 50 Hz 双 T 阻波电路输出波形
- ③ 100 Hz 双 T 阻波电路输入波形（同①）
- ④ 100 Hz 双 T 阻波电路输出波形

- ⑤保护装置输出接点电位
- ⑥谐波制动部分输出的闭锁电位
- ⑦输入电流（代表差动回路电流）

示波图33表示差动电流为基波稳定电流，（持续期不受限制），这时闭锁电位恒为零，保护装置经一个多周期正确动作。

示波图34表示基波差动电流只输入约三个周期，这次输入电流初值很大，在50Hz双T阻波电路中出现很大的暂态振荡电流（9次谐波）因此有闭锁电位输出，保护装置被闭锁住一个多周期，随后，保护装置在基波差动电流作用下开始动作，输出接点电位在逐渐升高，但在尚未完成动作前，差动电流被切断了，在切断瞬间又出现了一个暂态过程，保护装置又被闭锁住，这样就不能有明确的动作状态。但这个顾虑是不必要的，在差动保护未完成动作之前，故障电流不会切断，只有在保护已完成动作，开关跳闸才切断故障电流。从这一示波图中可看到由于50Hz双T阻波电路在其它元件形成了九次谐波的振荡，推迟了保护的动作时间。

示波图35表示一个很短的干扰讯号输入，保护装置被闭锁不误动。

示波图36和37表示输入电流为半波正弦电流（模拟激磁涌流）和非周期分量电流，当差动电流为这些电流时保护装置均可靠制动。

从示波图34和37可看到，突然切断电流均使保护装置被制动，这对防止切除外部故障时变压器差动保护误动作非常有利。但是从提高内部故障的切除速度来说，适当加快50Hz双T阻波电路的振荡衰减速度是合理的，也是可能的。

（七）美国西屋公司谐波制动保护空载合闸误动的原因分析

该公司在1976年出版的《Applied Protective Relaying》中提出了谐波制动式差动保护在一次空载合闸时误动的问题，对此问题他们认为原因是现代变压器铁心用的矽钢片都是冷轧的，磁化特性比较硬，饱和磁密与工作磁密之比只有1.2~1.3（在推导单相变压器激磁涌流最小二次谐波成分为17.1%时假定饱和磁密为额定工作磁密的1.4倍），如果认为饱和磁密与工作磁密的最小比值为1.15，则激磁涌流的最小二次谐波成分为7%，为此该公司将差动保护的二次谐波制动比由15%减为7.5%。

我们认为铁心的饱和磁密本身就是一个十分含糊的，它的大小是很不确切的，如图38所示，随着切线的切点位置不同而变，因此把误动原因归结为实际涌流二次谐波成分太小就不一定是确切的。

但是一个明显的问题是该公司的差动继电器的谐振滤波电路（图39），在工作线圈（OC）方用 L_1C_1 构成100Hz并联谐振阻波电路，在制动线圈（OR）方用 $L_2L_3C_2$ 构成50Hz阻波100Hz通过的电路，这在静态特性上是可以的。但是在空载合闸的暂态过程中，涌流的冲击波能在起始瞬间工作线圈中迅建立动作量，而在制动线圈中，由于 L_2 的作用，制动量建立比较慢，所以有可能在变压器空投初瞬造成误动。相同原理的继电器，在日本，在工作回路采用LC50Hz串联谐振电路，在制动回路则采用LC50

H Z 并联谐振电路（基波阻波，高次谐波通过），这就避免了合闸初瞬的误动问题。

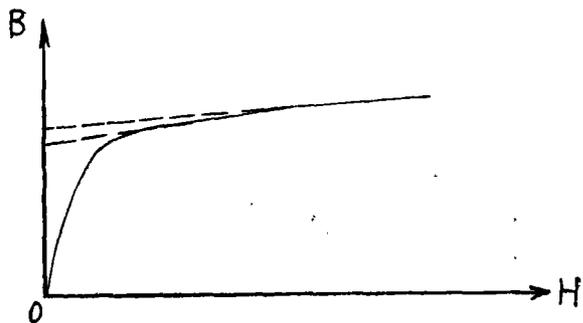


图 38

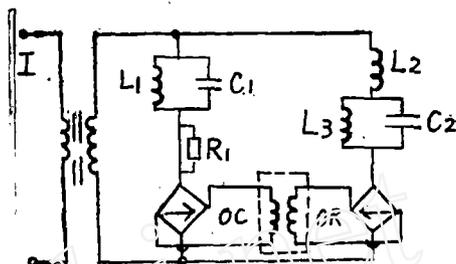


图 39

该公司认为在工作回路串入 60Ω ($3W$) 的电阻 R_1 就防止了误动，理由是二次谐波制动比减到 7.5% 。实际上这个电阻的串入，使动作量建立速度减慢了，该公司也指出由于加了电阻，动作速度慢了一个多周期，我们认为正是这个动作减慢才是防止空投涌流误动的真正原因。

据此，我们认为：在没有更充分的根据证明激磁涌流二次谐波成分可能小于 15% 以前，不应该将变压器差动保护的二次谐波制动比整定得比 15% 更小。

(八) 结 论

1. 由于付氏级数的离散频谱谐波分析法不能用于差动保护的内部短路分析，因此苏联 1977 年《电站》杂志发表的内部短路电流二次谐波成分资料是不成立的，否定二次谐波成分大小是区分涌流和短路的判据是错误的。

2. 现在还没有充分根据需要改变差动保护的二次谐波制动比，即变压器差动继电器应保持目前的二次谐波制动比 15% 。

附 录

公 式 (20) 的 推 导

由 (18) (19) 写成实函数时，从 $e^{j(\pm\omega_1 + ja)\tau}$ 项知道必有 $e^{-\alpha\tau} \cos\omega_1\tau$ 和 $je^{-\alpha\tau} \sin\omega_1\tau$ 两项，现在推导这两项的系数。

一、 $e^{-\alpha\tau} \cos\omega_1\tau$ 项的系数：

$$\frac{\omega_0(\omega_1 + j\alpha)}{[\omega_0^2 - (\omega_1 + j\alpha)^2][L(\omega_1 + j\alpha) + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)C}]} + \frac{\omega_0(\omega_1 - j\alpha)}{[\omega_0^2 - (-\omega_1 + j\alpha)^2][L(\omega_1 - j\alpha) + \frac{1}{(\omega_1 - j\alpha)C}]}$$

进行通分母运算得:

$$\begin{aligned} \text{分母} &= [\omega_0^4 + (\omega_1^2 + \alpha^2)^2 - \omega_0^2(2\omega_1^2 - 2\alpha^2)] \cdot [L^2(\omega_1^2 + \alpha^2) \\ &+ \frac{1}{(\omega_1^2 + \alpha^2)C^2} + \frac{L}{C}(\frac{\omega_1 - j\alpha}{\omega_1 + j\alpha} + \frac{\omega_1 + j\alpha}{\omega_1 - j\alpha})] \\ &= [2\omega_0^4 - 2(\omega_0^2\omega_1^2 - \alpha^2)] \cdot [L^2\omega_0^2 + \frac{1}{\omega_0^2C^2} + \frac{L}{C} \cdot \frac{2(\omega_1^2 - \alpha^2)}{\omega_0^2}] \\ &= 4[\omega_0^4 - \omega_0^2(\omega_1^2 - \alpha^2)] \cdot [L^2\omega_0^2 + \frac{L}{C} \cdot \frac{\omega_1^2 - \alpha^2}{\omega_0^2}] \\ &= 4[\omega_0^2 - \omega_1^2 + \alpha^2] \cdot [L^2\omega_0^4 + \frac{L}{C}(\omega_1^2 - \alpha^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \omega_0[\omega_0^2 - (\omega_1 - j\alpha)^2] \cdot [L(\omega_1 - j\alpha) + \frac{1}{(\omega_1 - j\alpha)C}][\omega_1 + j\alpha] \\ &+ \omega_c[\omega_0^2 - (\omega_1 + j\alpha)^2] \cdot [L(\omega_1 + j\alpha) + \frac{1}{(\omega_1 + j\alpha)C}][\omega_1 - j\alpha] \\ &= \omega_0[\omega_0^2 - (\omega_1^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\omega_1)][L\omega_0^2 + \frac{\omega_1^2 - \alpha^2 + 2j\alpha\omega_1}{C\omega_0^2}] \\ &+ \omega_c[\omega_0^2 - (\omega_1^2 - \alpha^2 + 2j\alpha\omega_1)][L\omega_0^2 + \frac{\omega_1^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\omega_1}{C\omega_0^2}] \\ &= 2\omega_c[\omega_0^2 - (\omega_1^2 - \alpha^2)][L\omega_0^2 + \frac{\omega_1^2 - \alpha^2}{C\omega_0^2}] + \frac{8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0} \\ &= 2\omega_c[L\omega_0^4 - \frac{(\omega_1^2 - \alpha^2)^2}{C\omega_0^2} + (\omega_1^2 - \alpha^2)(\frac{1}{C} - L\omega_0^2)] - \frac{8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0} \\ &= 2\omega_c[L\omega_0^4 - L(\omega_1^2 - \alpha^2)^2] - \frac{8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0^2} \\ &= 2\omega_c[L(\omega_1^2 + \alpha^2)^2 - L(\omega_1^2 - \alpha^2)^2] - \frac{8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0} \\ &= \frac{-8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0} + 8\omega_0L\alpha^2\omega_1^2 = \frac{-8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0} + \frac{8\alpha^2\omega_1^2}{C\omega_0^2}\omega_0 = 0 \end{aligned}$$

所以COS $\omega_1\tau$ 项不存在

二、 $e^{-\alpha\tau}\sin\omega_1\tau$ 项系数

该系数的分母和前一一样, 分子为两项相减

$$\begin{aligned} \text{即} \quad &j\omega_0[\omega_0^2 - \omega_1^2 + \alpha^2 + 2j\alpha\omega_1][L\omega_0^2 + L(\omega_1^2 - \alpha^2 + 2j\alpha\omega_1)] \\ &- j\omega_c[\omega_0^2 - \omega_1^2 + \alpha^2 - 2j\alpha\omega_1][L\omega_0^2 + L(\omega_1^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\omega_1)] \\ &= j\omega_0L\{(\omega_0^2 - \omega_1^2 + \alpha^2) + 2j\alpha\omega_1\}[(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \alpha^2) + 2j\alpha\omega_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[(\omega_0^2 - \omega_1^2 + \alpha^2) - 2j\alpha\omega_1] [(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \alpha^2) - 2j\alpha\omega_1] \\
& = j\omega_1 L \{-4\alpha^2\omega_1^2 + 4\alpha^2\omega_1^2 + 4j\alpha\omega_1(\omega_0^2 - \omega_1^2 + \alpha^2 + \omega_0^2 + \omega_1^2 - \alpha^2)\} \\
& = j\omega_1 L (j8\alpha\omega_1\omega_0^2) = -8\alpha\omega_1\omega_0^2 L \\
\text{分母} & = 4[\omega_0^2 - (\omega_1^2 - \alpha^2)] [L^2\omega_0^4 + L^2\omega_0^2(\omega_1^2 - \alpha^2)] \\
& = 4L^2\omega_0^2[\omega_0^2 - (\omega_1^2 - \alpha^2)] [\omega_0^2 + (\omega_1^2 - \alpha^2)] \\
& = 4L^2\omega_0^2[\omega_0^4 - (\omega_1^2 - \alpha^2)^2] \approx 4L^2\omega_0^2[(\omega_1^2 + \alpha^2)^2 - (\omega_1^2 - \alpha^2)^2] \\
& = 16L^2\omega_0^2\omega_1^2\alpha^2
\end{aligned}$$

所以 $e^{-\alpha\tau} \sin\omega_1\tau$ 的系数为

$$\frac{-8L\omega_0^3\omega_1\alpha}{16L^2\omega_1^2\alpha^2} = \frac{-\omega}{2\alpha L\omega_1} = \frac{-\omega}{R\omega_1}$$

其它项系数的推导过程从略。

主要参考文献

1. A. A. 哈尔凯维奇 频谱和分析
2. 《电站》1977年1月
3. 《Applied protective Relaying》1976

作者曾在“大容量机组火力发电技术情报网”的会议上报告了本文的理论分析部分，并在内部刊物《大容量机组火力发电技术》总70号电气——015号发表了有关部分。这次除作少量修改外增加了试验资料一并发表。

——作者