逻辑保护的概率计算（上）

江西南昌供电局　张旭俊

前　言：

随着高压电网和静态保护的并行发展，促使继电保护装置向多重化迈进，这是由于：

（1）高压电网的发展对继电保护装置动作可靠性的要求愈来愈高。

（2）电磁式有接点保护体积大，消耗功率多，动作速度慢，代电压下会振动等问题，缺点很多，因而保护渐趋由静态保护替代。

（3）静态保护适于按各种原理而构成多样化保护装置，而且价格日益下降。

（4）弱电回路易受干扰，晶体管元件繁多，弱点总是会存在的。

基于这些原因，目前解决的办法是采用几套按不同原理构成的静态保护，再依选定的逻辑组合方案而构成多重化保护装置。从技术经济的角度看，怎样的逻辑组合较好？因而也就产生了多重化逻辑保护的可靠性（误动率、拒动率）计算问题——简称为逻辑保护的概率计算。

关于逻辑保护的概率计算，目前国内、外均有资料，看来问题似乎是解决了的，其实不然，目前关于逻辑保护的概率计算，不单存在表达形式上的杂乱，而且还存在概念上的错误。下面试以译文《日本500千伏电力系统的继电保护方式》中的（保护系统多重度与可靠性关系）表（见南京水电仪表厂《技术情报》73年3期）为例来阐明问题。下面列出表一，以逻辑代数表达组合保护方案构成，并在表的右侧加了评价栏。

表　一

	组合保护方案的动作逻辑表式	可靠性		评价
		拒动率P_Σ	误动率q_Σ	
1	$M=M_1\cdot M_2$	$P_1+P_2-P_1P_2\cong 2P$	$q_1q_2\cong q^2$	正确
2	$M=M_1+M_2$	$P_1P_2\cong P^2$	$q_1+q_2-q_1q_2\cong 2q$	正确
3	$M=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_1$	$(P_1+P_2-P_1P_2)\times(P_2+P_3-P_2P_3)\times(P_3+P_1-P_3P_1)\cong 8P^3$	$(q_1q_2+q_2q_3+q_3q_1)-q_1^2q_2q_3-q_1q_2^2q_3-q_1q_2q_3^2+q_1^2q_2^2q_3^2\cong 3q^2$	错误
4	$M=M_1M_2+M_3M_4$	$(P_1+P_2-P_1P_2)\times(P_3+P_4-P_3P_4)\cong 4P^2$	$q_1q_2+q_3q_4-q_1q_2q_3q_4\cong 2q^2$	正确

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

从表一可以看出经典理论存在下述两个缺点：

（1）组合保护的动作逻辑表式（简称逻辑表式）和可靠性计算的概率表式（简称概率表式）之间，缺乏形式上的直观联系，显得漫无规律，它反映经典理论还没有找出按一定程序简单，迅速地求得答案的途径。

（2）经典理论对相关变数和独立变数概率计算之间的差别混淆不清，而常是以后者当前者，因而不免有些结论错误，如表一中第三栏就是错误的，因M_1、M_2、M_3三个变数在逻辑表式中都重复出现了两次，须知M_1是一个，当“这M_1”出现时，必有“那M_1”也出现的关系，它们是完全相关变数，因而如表一在误动率表式中见有$q_1{}^2q_2q_3$、$q_1{}^2q_2{}^2q_3{}^2$等项的出现，显然是错误的，因$M=M_1\cdot M_1=M_1$，它的误动率是q_1，而绝不是$q_1{}^2$。

由此可知逻辑保护的概率计算的任务，经典理论尚未完成。本文的研究首先是能消除上述两个缺点，即能分别指出一套按一定程序简单、迅速地求出独立变数或相关变数概率表式的途径；保证逻辑表式和概率表式之间有完全相照应的表达形式。

诚然本文的研究有一部分是属于逻辑代数理论的发展和延伸，它是研究的“付产品”，本文的论述着重于举一反三的演绎，而且只是以工程应用范畴来限定自己的目的。无疑本文的研究对多重化继电保护的概率计算，对发展逻辑代数在继电保护中的应用，都同样是很有必要的。

一、概念和述语

下面首先区分逻辑表式、概率表式、误动率、拒动率之间的关系。

（一）逻辑表式：

设有M_1、M_2两逻辑变数，按动作逻辑规则（即动作时$M=1$）构成逻辑组合。应用逻辑代数的方式可写出逻辑表式如下：

1、“和”逻辑

$$M=M_1M_2 \cdots\cdots (1.1)$$

它表示只当M_1、M_2都动作时，即$M_1=1$；$M_2=1$，才有$M=1\times1=1$，即M亦动作，故称“和”逻辑。

2、“或”逻辑

$$M=M_1+M_2 \cdots\cdots (1.2)$$

它表示只要M_1、M_2中有一个或两个动作时，M就动作，故称“或”逻辑。

（二）概率表式：

设有M_1、M_2两独立事件，它们出现的概率分别为m_1、m_2，逻辑组合的概率表式，可根据概率论写出为：

1、“和”概率

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$m = m_1 m_2$ ……（1.3）

它表示M_1、M_2两事件同时出现的总概率，故称“和”概率。

2、“或”概率

$m = m_1 + m_2 - m_1 m_2$ ……（1.4）

它表示M_1、M_2两事件中有一件或两件出现时的总概率，故称“或”概率。

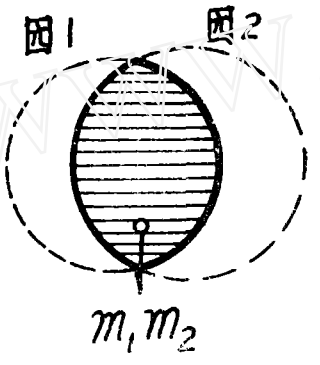
（三）逻辑表式与概率表式之间关系：

1、逻辑表式是以动作（$M = 1$）和不动作（$M = O$）两截然对立的逻辑观念来考察问题，它只有乘、加、补码三种运算。M的补码记以$\overline{M}$，且有$M + \overline{M} = 1$的关系。

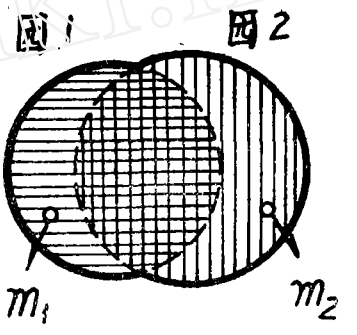
2、概率表式是以概率$O < m < 1$这样区间变数观念来考察问题，一般它亦只作乘、加、减三种运算。其中概率的补码，是指M不出现时的概率，简记以$\overline{m}$，显然有$\overline{m} = 1 - m$。

3、一致与不一致现象：

对比（1.1）和（1.3）可知，“和”逻辑与“和”概率表达的形式一致；而“或”逻辑与“或”概率表达的形式不一致。这种现象可用图示法剖析如下：如图一、图二。



图一、“和”逻辑



图二、“或”逻辑

设M_1在园①内时动作，M_1出现在园①内的概率为m_1；M_2在园②内时动作，M_2出现在园②内的概率为m_2。

（1）两者同时动作的“和”逻辑，相当于M_1、M_2同时出现在重叠的凸镜区内，其“和”概率显然为$m = m_1 m_2$，如图一所示。

（2）两者之一或同时动作的“或”逻辑，相当于M_1、M_2分别出现在园1和园2区内，其概率若以$m = m_1 + m_2$表示，则多重复了一个$m_1 m_2$重叠的凸镜区（图二中的十字交错阴影区），因而必须再减掉一个多余的概率$m_1 m_2$，即

$m = m_1 + m_2 - m_1 m_2$

（3）由此可见相乘的“和”逻辑与“和”概率表达形式一致，因它是最小项，没有重复；而相加的“或”逻辑与“或”概率的表达形式却不能一致，因它是最大项，有

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

重复区。

4、“和”逻辑可以看成是“和”概率中的一个特例，只要令m限定在0、1两者中选居其一就是。

5、为使“或”逻辑亦可以看成是“或”概率中的一个特例，可以改写（1.2）式如下：

$$\overline{M}=\overline{M_1+M_2}=\overline{M_1}\cdot\overline{M_2}\cdots\cdots(1.5)$$

由于M出现的概率为m；则补码$\overline{M}$出现的概率为（$1-m$）。记作$M\doteq m$；$\overline{M}\doteq 1-m$。将此关系代入（1.5）式可得：

$$1-m=(1-m_1)(1-m_2)\cdots\cdots(1.6)$$

显然（1.6）式和（1.4）式结果完全相同，但经如此变化后的逻辑表式（1.5）和概率表式（1.6）的形式，就能做到完全相呼应。

（四）误动率和拒动率：

1.误动率q和拒动率P是两个相反的观念，但它们并不是互为补码的事情，即：$P+q\neq 1$。

2.误动率q和不误动率$\overline{q}=1-q$是互为补码的，即：$q+\overline{q}=1$；拒动率P和不拒动率$\overline{P}=1-P$是互为补码的，即：$P+\overline{P}=1$。

3.对动作逻辑规则而言，逻辑变数原码M，对应着事件出现的概率m；对应着保护误动率q；对应着保护不拒动率（$1-P$），简写为：

$$M\doteq m\doteq q\doteq(1-P)$$

其中符号$\doteq$表相照应变换的含义。

假如以M_1、M_2两逻辑变数构成“和”逻辑，它的“和”概率、误动率、拒动率可分别计算如下：

（1）“和”逻辑：$M=M_1M_2\cdots\cdots(1.7)$

（2）“和”概率：以$M\doteq m$的关系代入（1.7）式，可得：$m=m_1m_2$

（3）误动率：以$M\doteq q$的关系代入（1.7）式，可得：$q=q_1q_2$。

（4）拒动率：以$M\doteq(1-P)$的关系代入(1.7)式，可得：$1-P=(1-P_1)(1-P_2)$。

4.对动作逻辑规则而言，逻辑变数补码$\overline{M}$，对应着事件不出现的概率（$1-m$）；对应着保护不误动率（$1-q$）；对应着保护拒动率P，简写为：

$$\overline{M}\doteq(1-m)\doteq(1-q)\doteq P$$

假如以M_1、M_2两逻辑变数构成“或”逻辑，它的“或”概率、误动率、拒动率可分别计算如下：

（1）“或”逻辑：

$$\overline{M}=\overline{M_1+M_2}=\overline{M_1}\cdot\overline{M_2}\cdots\cdots(1.8)$$

（2）“或”概率：以$\overline{M}\doteq 1-m$的关系代入(1.8)式，可得：$1-m=(1-m_1)(1-m_2)$

（3）误动率：以$\overline{M}\doteq 1-q$的关系代入(1.8)式，可得：$1-q=(1-q_1)(1-q_2)$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

（4）拒动率：以$M \rightleftharpoons P$的关系代入(1.8)式，可得：$P = P_1 P_2$

5.对动作逻辑规则而言，误动率的表式q，可直接由概率表式经$m \rightleftharpoons q$置换而得到，故它们之间存在着相照应的关系；拒动率的表式P，可直接由概率表式经$m \rightleftharpoons 1-P$置换而得到，故它们之间存在着反照应的关系。因而为了简便，常常只先讨论m概率表式的计算，如需要可直接由m表式推出q、P的表式。

二、独立变数逻辑表式的概率计算

独立变数的原义是指它和其他变数之间不存在相互约束的条件。本文对独立变数逻辑表式的定义要狭窄得多，它指逻辑表式中，各逻辑变数均只出现一次的，才称独立变数逻辑表式，如：

$$M = M_1 M_2 \cdots\cdots (2.1)$$

$$M = M_1 + M_2 \cdots\cdots (2.2)$$

$$M = M_1 (M_2 + M_3) \cdots\cdots (2.3)$$

$$M = M_1 M_2 + M_3 M_4 \cdots\cdots (2.4)$$

各式均是独立变数的逻辑表式。独立变数的概率计算前已作了初步说明，下面指出普遍的原则和程序。

（一）连积定理和概率变换：

如(1.7)、(1.8)式，不论是原码相乘$M_1 M_2$还是补码相乘$\overline{M_1}$、$\overline{M_2}$的逻辑表式，都可按概率变换$M \rightleftharpoons m$，$\overline{M} \rightleftharpoons (1-m)$，直接写出它的概率表式。只要细心地联比一下，就可根据演绎推理的办法得出，一般情况下动作逻辑表式，首先应进行连积变化，即把它转变成一系列的逻辑变数（原码或补码）连续相乘（简称连积），然后再进行概率变换。为了避免移项的麻烦，连积定理和概率变换亦可按连续演算的方式进行。下面举例演算如下：

例一：“或”概率计算

$$M = M_1 + M_2 = \overline{\overline{M_1 + M_2}} = \overline{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}} \rightleftharpoons \overline{(1-m_1)(1-m_2)}$$

$$\rightleftharpoons 1 - (1-m_1)(1-m_2) \cdots\cdots (2.5)$$

（2.5）式表明如下连续演算过程：

1.原始动作逻辑表式

$$M = M_1 + M_2$$

2.采用否定之否定依然不变的原理进行补补码转换。

$$M_1 + M_2 = \overline{\overline{M_1 + M_2}}$$

3.应用狄、摩根定理将补码进行连积变化。

$$\overline{\overline{M_1 + M_2}} = \overline{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}}$$

4.将连积变化部分进行概率变换，称第一步脱壳。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\overline{\overline{M_1}\cdot\overline{M_2}} \doteq \overline{(1-m_1)(1-m_2)}$$

5.依概率补码定义进行第二步脱壳。

$$\overline{(1-m_1)(1-m_2)} \doteq 1-(1-m_1)(1-m_2)$$

6.将中间过程缩简可得：

$$M=\overline{\overline{M_1}\cdot\overline{M_2}} \doteq 1-(1-m_1)(1-m_2) \cdots\cdots (2.6)$$

（2.6）式是连续演算的典型形式，以下可直接套用。

为了简便，以下采用连续演算方式直接由逻辑表式推出它相照应的概率表式，并最后拆成多项式和，以备对比之用。

例二：

$$M=M_1(M_2+M_3)=M_1\overline{\overline{(M_2+M_3)}}=M_1\overline{\overline{M_2}\cdot\overline{M_3}}$$

$$\doteq m_1[1-(1-m_2)(1-m_3)]=m_1[m_2+m_3-m_2m_3]$$

$$=m_1m_2+m_1m_3-m_1m_2m_3 \cdots\cdots (2.7)$$

例三：

$$M=M_1M_2+M_3M_4=\overline{\overline{M_1M_2}+\overline{M_3M_4}}=\overline{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_3M_4}}$$

$$\doteq 1-(1-m_1m_2)(1-m_3m_4)=m_1m_2+m_3m_4-m_1m_2m_3m_4$$

$$\cdots\cdots (2.8)$$

三、相关变数逻辑表式的概率计算

同样本文对含有相关变数逻辑表式的定义也是狭窄的，它指逻辑表式中存在有重复出现二次以上的逻辑变数时，就称其为含相关变数的逻辑表式，如：

$$M=M_1M_2+M_1M_3 \cdots\cdots (3.1)$$

$$M=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_1 \cdots\cdots (3.2)$$

$$M=M_1\overline{M_2}+M_2\overline{M_3}+M_3\overline{M_1} \cdots\cdots (3.3)$$

$$M=\overline{M_1M_2M_3+\overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3}} \cdots\cdots (3.4)$$

各式均是含有相关变数的逻辑表式。特别值得指出的是（3.1）式，如果将M_1提出括号外，它就转为（2.3）式。在（2.3）式中M_1只出现一次，本文称它为独立变数；而（3.1）式中M_1却出现两次，本文称它为相关变数。本文对独立变数和相关变数的狭窄定义，它是和本文提出的运算方法相联系，这样规定比较有利，详见下文。

（一）相关变数表式中的不一致现象：

下面我们先考察一个逻辑代数连等式，即：

$$M=M_1=2M_1=M_1+M_1=M_1\cdot M_1 \cdots\cdots (3.5)$$

这个连等式意味着四个方程，显然它们的概率都同是m_1，可分列写为：

$$M=M_1 \doteq m_1 \cdots\cdots (3.5a)$$

$$M=2M_1 \doteq m_1 \cdots\cdots (3.5b)$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$M = M_1 + M_1 \doteq m_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.5c)$$

$$M = M_1 \cdot M_1 \doteq m_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.5d)$$

如（3.5b）——（3.5d）三式都是未经约简的逻辑代数表式，肯定是含相关变数的，由上可见逻辑表式和概率表式不一致。就一般情况而言，将逻辑代数表式约成最简，并不是一眼就可看得出，判定得了，况且逻辑代数的最约简式还未必就是一个，例如（3.3）和（3.4）式都是最简式，且它们是完全相等的逻辑代数等式（见下文证明）。因而放在我们面前的第一个任务是：不管逻辑代数表式是否已约简为最小化式，都应能消除逻辑表式和概率表式之间的不一致现象。

（二）相关变数的独立化：

1.消系数定理：

消系数定理是指：逻辑代数的多项式中，如各项有常系数，均可约去。其原理可以（3.5b）式说明如下：

$M = 2M_1$应看成是常数2和变数M_1构成“和”逻辑，常数出现的概率恒为1，M_1出现的概率为m_1，故$2M_1$的“和”概率为$m = 1 \times m_1 = m_1$，由此可知逻辑代数中各项的常系数总可约去，作为第一步化简。

2.独立化定理：

将相关变数逻辑表式，暂且当作独立变数逻辑表式（即把重复出现的M_1看成一个是M_1、另一个是M_1'……等），仿前述连续演算步骤进行概率表式的计算，然后再注意$M_1 \equiv M_1'$完全相关，修正概率表式。在实际运算时为了书写简化，这一撇并无必要标出。

下面以（3.5c）、（3.5d）为例进行如下：

$$M = M_1 + M_1 = \overline{\overline{M_1 + M_1}} = \overline{\overline{M_1} \cdot \overline{M_1}} \doteq 1 - (1 - m_1)(1 - m_1)$$

$$= 2m_1 - m_1^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.6)$$

$$M = M_1 \cdot M_1 \doteq m_1 m_1 = m_1^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.7)$$

由（3.6）、（3.7）两式可知，其概率的结果都不是m_1，因而结论是错误的，因为它没有考虑$M_1 \equiv M_1'$，完全相关，在等式中出现m_1^2项是不合理的。

3.单幂定理：

设Mi是逻辑表式中重复出现n次的相关变数，但它毕竟是同一个事件，因而在概率表式中出现mi^n的高次幂是不合理的，应换成mi的单幂，写作$mi^n \doteq mi$。

将（3·6）、（3·7）式应用单幂定理修正后，均可得到概率是m_1的结果，可见它完全正确了。

（三）相关变数概率表式的实例计算：

例一：以（3.1）式为例演算如下：

$$M = M_1M_2 + M_1M_3 = \overline{\overline{M_1M_2 + M_1M_3}} = \overline{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\doteqdot 1-(1-m_1m_2)(1-m_1m_3)=m_1m_2+m_1m_3-m_1^2m_2m_3$$

$$\doteqdot m_1m_2+m_1m_3-m_1m_2m_3 \cdots\cdots (3.8)$$

相关变数的概率计算式（3.8），它经过如下一系列连续演算而得到，它们是：

1.逻辑表式，独立化定理。

2.补补码变换。

3.连积定理。

4.概率变换。

5.展开。

6.单幂定理。

和（2.7）式相比，可见结果是完全相同的。

例二：以（3.2）式为例演算如下：

$$M=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_1=\overline{\overline{M_1M_2+M_2M_3+M_3M_1}}$$

$$=\overline{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_2M_3}\cdot\overline{M_3M_1}}\doteqdot 1-(1-m_1m_2)(1-m_2m_3)(1-m_3m_1)$$

$$=m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1-m_1m_2^2m_3-m_1m_2m_3^2-m_1^2m_2m_3+m_1^2m_2^2m_3^2$$

$$\doteqdot m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1-2m_1m_2m_3 \cdots\cdots (3.9)$$

为了使人信服（3.9）式的结果是正确的，我们用图示法剖析如下，见图三：

设M_1、M_2、M_3各逻辑变数分别在园①、②、③域内时动作；M_1、M_2、M_3分出别现在园①、②、③域内时的概率为m_1、m_2、m_3。

而逻辑表式$M=M_1M_2+M_2M_3+M_3M_1$的总动作区域，相当于三个凸镜叶。每一凸镜叶的"和"概率分别为m_1m_2、m_2m_3、m_3m_1。而M出现在三个凸镜叶内的总概率，若以$m_1m_2+m_2m_3+m_3m_1$表示的话，则从图可知多重复了两次$m_1m_2m_3$的概率（它相当于*字交叉阴影区），故应再减去$2m_1m_2m_3$，可见（3.9）式的结果是正确的。

由于本例逻辑表式就是表一中的第三栏，为了对比方便，我们用相应和反照应的变换，直接求出误动率q_Σ和拒动率P_Σ的表式如下：

（1）误动率q_Σ

对（3.9）式采用$m\doteqdot q$变换，可得：

$$q_\Sigma=q_1q_2+q_2q_3+q_3q_1-2q_1q_2q_3 \cdots\cdots (3.10)$$

（2）拒动率P_Σ

对（3.9）式采用$m\doteqdot 1-P$变换，可得：

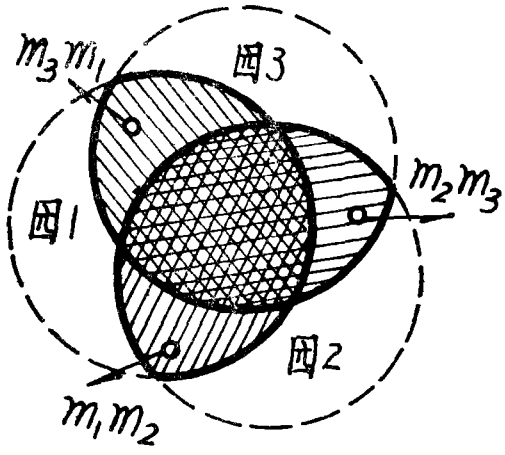
$$1-P_\Sigma=(1-P_1)(1-P_2)+(1-P_2)(1-P_3)+(1-P_3)(1-P_1)$$
$$-2(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)$$

经化简后可得：

$$P_\Sigma=P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1-2P_1P_2P_3 \cdots\cdots (3.11)$$

公式（3.10）和（3.11）表明了按表一第三栏构成组合保护（俗称2/3组合方式）时的误动率和拒动率应有的计算结果，特别值得指明的是q_Σ和P_Σ的表式完全相同，它说明按2/3组合方式构成组合保护装置，可以同时按相同数量级降低误动率和拒动率，

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



图三

公式（3·9）逻辑—概率结果图示剖析

因而是比较理想的。

其实只要对表一第三栏经典理论结果，进一步应用单幂定理亦可得到和（3.10）、（3.11）一样的结果。它说明经典理论的错误在于没有分清相关变数的概率计算和独立变数的概率计算之间的不同。

四、逻辑代数和普通代数之间的转换

如所周知，逻辑代数式的展开约简或逻辑代数等式的证明，它不像普通代数那样有着刻板的规律可循，况且逻辑代数式是否已经约简到最小化，并非一眼就可看得出来。本节的研究却向人们报告了两个值得欣喜的信息：

（1）逻辑代数等式的证明，可以转换为普通代数恒等式的证明。

（2）逻辑代数式是否已约简到最小化，可以有普通代数的判据。

显然这对逻辑代数的发展也是非常重要的结果，因而本节在作逻辑保护概率计算的同时，略为超题演绎亦是十分必要的。

1.逻辑代数等式的证明：

已如前述（3.3）、（3.4）是逻辑代数的等式，即有：

$$M_1\overline{M_2}+M_2\overline{M_3}+M_3\overline{M_1}=\overline{M_1M_2M_3+\overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

（1）先用逻辑代数法证明：

令：

$$\overline{M}=\overline{M_1\overline{M_2}+M_2\overline{M_3}+M_3\overline{M_1}}=\overline{M_1\overline{M_2}}\cdot\overline{M_2\overline{M_3}}\cdot\overline{M_3\overline{M_1}}$$

$$=(\overline{M_1}+M_2)(\overline{M_2}+M_3)(\overline{M_3}+M_1)=M_1M_2M_3+\overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

注意$M_1\overline{M_1}=O$的关系，最后等式就简为两项了。虽则上述逻辑代数证明过程也很简洁，但一般不容易一下想到这一点上。

（2）用求相关变数的概率法来证明：

已如前述，由于逻辑表式可以看作是概率表式的特例（限令$m=0$或1），因而如能证明（4.1）式左侧和右侧的概率表式恒等，就等于证明了逻辑代数等式。

（a）依(3.4)式有：

$$M=\overline{M_1M_2M_3+\overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3}}=\overline{M_1M_2M_3}\cdot\overline{\overline{M_1}\,\overline{M_2}\,\overline{M_3}}$$

$$\doteqdot(1-m_1m_2m_3)\,[1-(1-m_1)(1-m_2)(1-m_3)]$$

注意应用单幂定理后必有$m_1(1-m_1)\doteqdot 0$，故上式可进一步简化为：

$$M\doteqdot 1-(1-m_1)(1-m_2)(1-m_3)-m_1m_2m_3$$

$$=m_1+m_2+m_3-m_1m_2-m_2m_3-m_3m_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.2)$$

（b）依(3.3)式有：

$$M=\overline{M_1\overline{M_2}+M_2\overline{M_3}+M_3\overline{M_1}}=\overline{M_1\overline{M_2}}\cdot\overline{M_2\overline{M_3}}\cdot\overline{M_3\overline{M_1}}$$

$$\doteqdot 1-[1-m_1(1-m_2)]\,[1-m_2(1-m_3)]\,[1-m_3(1-m_1)]$$

$$\doteqdot m_1(1-m_2)+m_2(1-m_3)+m_3(1-m_1)$$

$$=m_1+m_2+m_3-m_1m_2-m_2m_3-m_3m_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.3)$$

对比一下（4.2）和（4.3）式，可见它们的概率表式是恒等的，因而逻辑代数等式也就得到了证明。

为了说明逻辑表式（3.3）、（3.4）和概率表式（4.2）或（4.3）的含义，特在图四中作出上述四式的逻辑——概率结果图示剖析，读者不难自明。

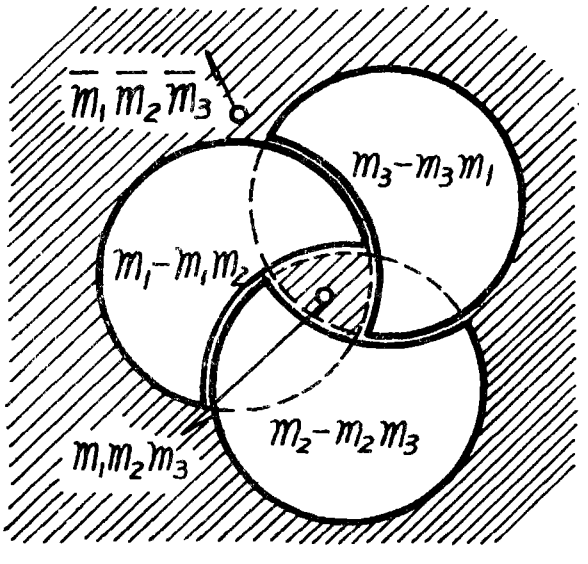


图　四

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2.最小化逻辑表式的判据：

最小化逻辑表式的定义：是指逻辑代数表式的总动作域，是由最小项之和来组成，故它不存在重复的动作区。

应用本文提出的逻辑——概率理论，可作出最小化逻辑表式的判据如下：若逻辑表式与概率表式之间能有完全相照应的形式，则它必然是最小化逻辑表式。

例如：$M = M_1 + M_2 = M_1M_2 + \overline{M}_1M_2 + M_1\overline{M_2} = \overline{\overline{M_1}\,\overline{M_2}}$

$\doteq m_1 + m_2 - m_1m_2$

其中：

（1）$M = M_1 + M_2 \doteq m_1 + m_2 - m_1m_2$

可见逻辑——概率表式之间不是相照应，故其不是最小化逻辑表式。

（2）$M = M_1M_2 + \overline{M}_1M_2 + M_1\overline{M_2} \doteq m_1 + m_2 - m_1m_2$

$= m_1m_2 + (1-m_1)m_2 + m_1(1-m_2)$

可见逻辑——概率表式之间完全相照应，故知其是最小化逻辑表式。

（3）$M = \overline{\overline{M_1}\cdot\overline{M_2}} \doteq m_1 + m_2 - m_1m_2$

$= 1-(1-m_1)(1-m_2)$

可见逻辑——概率表式之间完全相照应，故知其也是最小化逻辑表式。

最小化逻辑表式判据的一般原理可说明如下：概率表式完全符合四则运算的规则，而逻辑代数与四则运算之间存在的唯一差别，在于它作了 $1+1=1$ 的规定。正是这一点使得动作逻辑表式中含有重复动作区的大小体现不出来，故逻辑代数等式往往不是普通代数含义上的等式。但若逻辑表式和概率表式的形式完全相照应，而逻辑表式只不过是概率表式的特例，不论各逻辑变数取 0 或 1，它相当于 m_i 取 0 或 1，其逻辑表式的总值不会产生 $1+1$ 的情况，因为概率表式的总值总是小于或等于 1，可知此时逻辑表式不存在重复动作区，因而是最小化逻辑表式。

由此我们还可得出两个推论：

（1）独立变数逻辑表式，经连积定理变化后，它就是最小化逻辑表式，因为它和概率表式形式完全相照应，而这个照应就是概率变换。

（2）相关变数逻辑表式，经连积定理变化后，一般说它都不是最小化逻辑表式，因为它和概率表式形式不能完全相照应，其差别在于应用单幂定理后，其中被约简消去的部分，它相当于重复动作区。

考察一下（4.2）和（4.3）式是颇有意义的，下面分别写出如下：

（1）$M = \overline{M_1M_2M_3} + M_1\overline{M_2M_3}$

$\doteq 1-[m_1m_2m_3 + (1-m_1)(1-m_2)(1-m_3)]$ …… （4.4）

由（4.4）可见其逻辑表式和概率表式具有完全相照应的形式，因而可知其为最小化逻辑表式。

（2）$M = M_1\overline{M_2} + M_2\overline{M_3} + M_3\overline{M_1}$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\doteqdot m_1(1-m_2)+m_2(1-m_3)+m_3(1-m_1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.5)$$

由（4.5）可见其逻辑表式和概率表式亦具有完全相照应的形式，因而亦可知其为最小化逻辑表式。

（4.4）、（4.5）两式的逻辑——概率表式的含义，及其均不包含重复动作区的原因，我们都可从图四的剖析中看出来。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net